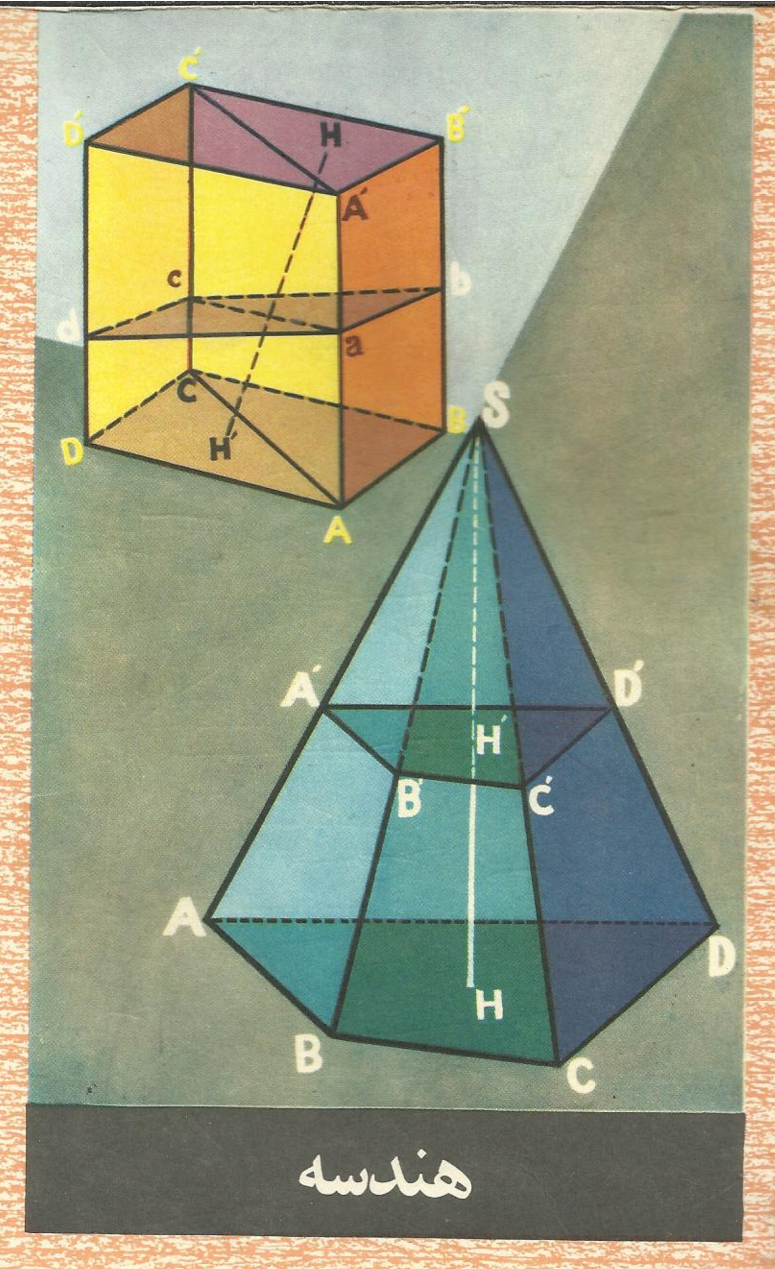


هندسه

برای سال پنجم ریاضی

توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

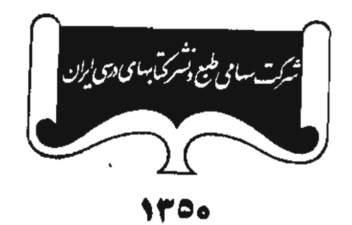
توانا بود هرکه دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

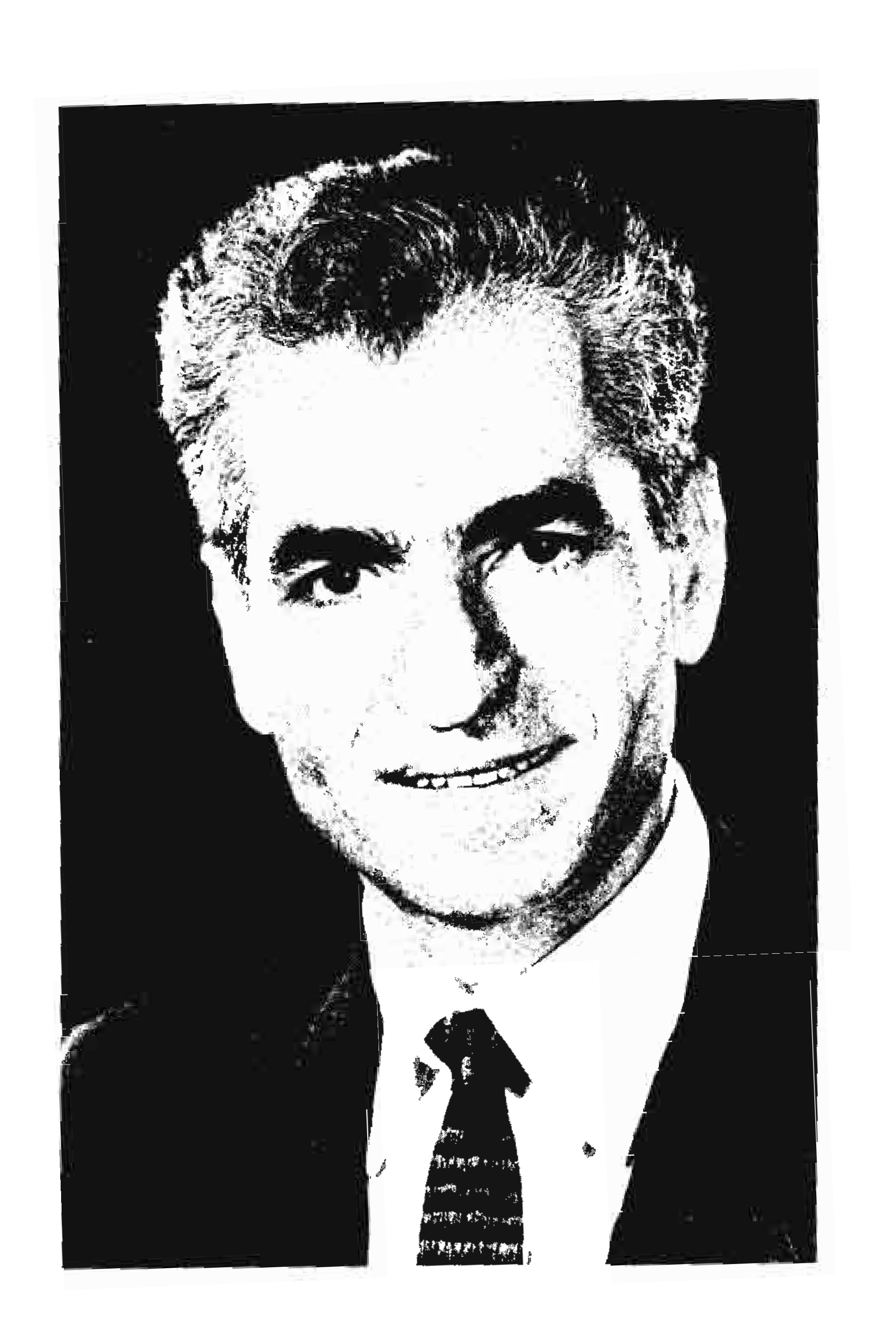
هندسه

برای سال پنجم ریاضی

چاپ و توزیع از :



۱۳۵۰



این کتاب‌که به‌وسیلهٔ آقایان : ابوالقاسم قربانی‌و
حسن صفاری نگارش یافته ، برطبق مادهٔ ۳ قانون کتابهای
درسی و اساسنامهٔ سازمان کتابهای درسی ایران برای تدریس
در دبیرستانها برگزیده شده است .

چاپ‌از : پیروز

MANSoor - Foolady

فهرست مندرجات

عنوان	صفحه
فصل اول	
۱ ـ فصل مشترك خط راست وصفحه ـ وضع نسبی دوخط	
راست در فضا ـ فصل مشترك دوصفحه	۱
فصل مشترك دو صفحه	۵
۲ ـ خطوط راست وصفحات متوازی خطوط متوازی در فضا	۶
زاویهٔ دوخط	۸
خط وصفحهٔ متوازی	۱۱
صفحات متوازی	۱۶
خواص متری صفحات متوازی	۲۰
۳ ـ خط وصفحهٔ عمود برهم	۲۱
صفحات عمود بریك خط راست	۲۵
خط عمود بریك صفحه	۳۰
قضیهٔ سه عمود	۳۲
عمود ومایل	۳۳
۴ ـ فرجه (زاویهٔ دووجهی)	۳۷
۵ ـ صفحات عمود بریکدیگر	۴۶
۶ ـ تصویر قائم بریك صفحه	۵۱
تصویر قائم یك زاویهٔ قائمه بریك صفحه	۵۷
۷ ـ زاویهٔ خط راست باصفحه	۶۱
۸ ـ عمود مشترك دوخط متنافر	۶۳
اقصر فاصلهٔ دوخط متنافر	۶۶
۹ ـ مساحت تصویر یك شكل مسطح بریك صفحه	۶۶
۱۰ ـ كنج یازاویهٔ سهوجهی	۶۹

exceremont
urmonsibelly
Moghfoutsioneg

عنوان | صفحه

۱۱ – کنج یا زاویهٔ چندوجهی ۷۳
خطوط وصفحات متوازی ۷۹
خط وصفحهٔ عمود برهم ۸۰
فرجه – صفحات عمود برهم – تصویر قائم ۸۱

فصل دوم

۱ – چند وجهی و اقسام آن ۸۳
۲ – منشور ۸۷
۳ – متوازی‌السطوح ۹۲
۴ – حجم متوازی السطوح و منشور ۹۶
حجم مکعب مستطیل ۹۷
حجم منشور قائم ۱۰۰
حجم منشور مایل ۱۰۳
۵ – هرم ۱۰۷
هرم ناقص ۱۱۴
۶ – حجم هرم و هرم ناقص ۱۱۶
حجم هرم ناقص ۱۲۲
مسائل ۱۲۴

فصل سوم

۱ – استوانه ۱۲۹
۲ – مخروط ۱۳۳
۳ – اندازهٔ سطح و حجم استوانه ومخروط ۱۳۷
۴ – کره ۱۴۸
۵ – مساحت سطح کره و اندازهٔ حجم‌کره ۱۶۱
سطح کره ۱۶۱
حجم کره ۱۶۸

به‌نام خدا

هندسهٔ فضایی

فصل اول

۱ ـ فصل مشترك خط راست و صفحه ـ وضع نسبی دوخط راست در فضا ـ فصل مشترك دو صفحه

۱ ـ تعریف ـ صفحه سطح نامحدودی است که اگر از دو نقطهٔ دلخواه واقع برآن خط راستی بگذرانیم ، همهٔ نقاط این خط برآن سطح منطبق شوند .

وجود چنین سطحی را قبول می‌کنیم . سطح آب ساکن‌کم وسعت را می‌توان قسمتی‌ازصفحه‌ا نگاشت.

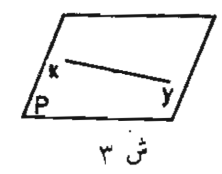
هرصفحه‌را به‌وسیلهٔ قسمت محدودی از آن معمولاً به‌شکل یك متوازی‌الاضلاع نشان می‌دهند (شکل ۱).

ش ۱

هرصفحه فضا را به دوناحیه تقسیم می‌کند ، بطوری که هرخط (راست یا منحنی) که یك نقطه مانند A از ناحیهٔ اول را به یك نقطه مانند B از ناحیهٔ دوم وصل کند لااقل دریك نقطه مانند C از صفحه عبور می‌کند یعنی به وسیلهٔ صفحه قطع می‌شود (شکل ۲) .

ش ۲

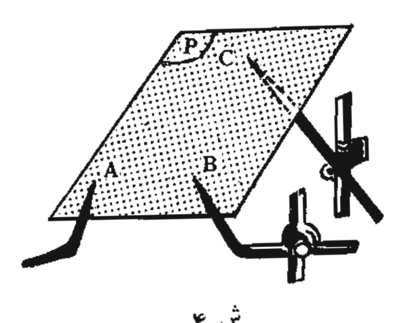
می‌دانیم که هر خط راست که دریك صفحه واقع باشدآن را به دو **نیم‌صفحه** تقسیم می‌کند ، خط مزبور را **مرز** هر یك از آن دو نیم‌صفحه می‌نامند (شکل ۳).



ش ۳

۲ - اصل - برسه نقطه‌که روی یك خط راست واقع‌نباشند می‌توان یك صفحه‌گذراند .

اگر سه نقطهٔ A ، B و C غیر واقع بر یك استقامت را به وسیلهٔ نوکهای سه سوزن مجسم کنیم مشاهده می‌شود که یك قطعه مقوای‌صفحه‌شکل‌را می‌توان بر نقاط A ، B و C متکی کرد(شکل۴).



ش ۴

۳ - قضیه - بر سه نقطه که روی یك خط راست واقع نباشند بیش از یك صفحه نمی‌توان‌گذراند.

فرض کنیم که از سه نقطهٔ A ، B و C که روی یك خط راست واقع نیستند دوصفحه مانند P و Q بگذرد (شکل۵) ؛ به‌موجب تعریف شمارهٔ ۱ هر یك ازسه خط راست AB ، AC و BC روی هریك ازصفحات P و Q واقع هستند. حال‌نقطه‌ای مانند M درصفحهٔ P اختیارکرده‌ثابت می‌کنیم

ش ۵

که این نقطه در صفحهٔ Q نیز واقع است . نقطهٔ M را به یکی ازنقاط خط AC مثلاً به نقطهٔ F وصل می‌کنیم ؛ خط راست MF درصفحهٔ P واقع است ولااقل یکی از دوخط AB و BC مثلاً AB را درنقطه‌ای مانند E قطع می‌کند ؛ چون دو نقطهٔ E و F درصفحهٔ Q واقع هستند ، خط راست EMF برصفحهٔ Q منطبق است ، یعنی نقطهٔ M درصفحهٔ Q قرار دارد .

به همین ترتیب ثابت می‌شود که هر نقطه از صفحهٔ Q نیز در صفحهٔ P واقع است ، یعنی دو صفحهٔ P و Q **بر هم منطبق هستند** .

۴ - اصل شمارهٔ ۲ و قضیهٔ شمارهٔ ۳ را می‌توان یکجا به عبارت زیر بیان‌کرد :

از سه نقطه‌که بریك استقامت واقع نباشند یك صفحه می‌گذرد وبیش از یکی نمی‌گذرد . به عبارت دیگر یك صفحه به وسیلهٔ سه نقطه که بر یك استقامت واقع نباشند مشخص می‌شود .

۵ - نتیجه :

اولا **از دو خط راست متقاطع یك صفحه می‌گذرد و بیش از یکی نمی‌گذرد** . به عبارت دیگر یك صفحه به وسیلهٔ دو خط راست متقاطع مشخص می‌شود .

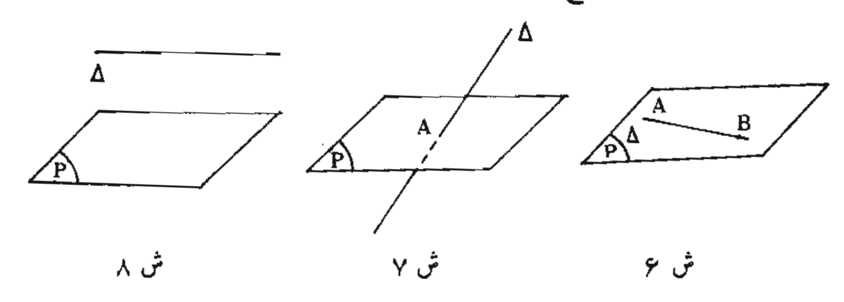
ثانیاً **از یك خط راست و یك نقطه که در خارج‌آن واقع باشد یك صفحه می‌گذرد وبیش ازیکی نمی‌گذرد.** به‌عبارت دیگریك صفحه‌به‌وسیلهٔ یك خط راست و یك نقطه‌که در خارج آن واقع باشد مشخص می‌شود .

ثالثاً **از دو خط راست متوازی یك صفحه می‌گذرد و بیش از یکی**

نمی‌گذرد * به عبارت دیگر یك صفحه به وسیلهٔ **دو** خط راست متوازی مشخص می‌شود .

۶ـ تبصره ـ دو صفحه را می‌توان برهم منطبق کرد و برای این کار کافی است که سه نقطهٔ یکی از آنها را که بر یك استقامت نباشند بر دیگری منطبق کنیم . پس از انطباق دو صفحه می‌توان یکی از آنها را روی دیگری لغزاند .

۷ ـ اوضاع نسبی خط راست و صفحه ـ خط راست نسبت **به صفحه فقط سه وضع می‌تواند داشته باشد :**



ش ۸ ش ۷ ش ۶

الف ـ دونقطه از خط راست در صفحه واقع است، دراین صورت نظر به شمارهٔ ۱ خط به تمامی در صفحه واقع می‌باشد (شکل۶).

ب ـ خط و صفحه **فقط** یك نقطهٔ مشترك دارند، در این صورت خط وصفحه را **متقاطع** و نقطهٔ مشترك آنها را **نقطهٔ تقاطع** یا **اثرخط** برصفحه یا **پای خط** در صفحه می‌گویند (شکل۷) .

ج ـ خط وصفحه نقطهٔ مشترك ندارند(وجود چنین خط وصفحه‌ای

* یادآور می‌شویم که دو خط راست را در صورتی متوازی می‌نامند که در یك صفحه واقع باشند و یکدیگر را قطع نکنند .

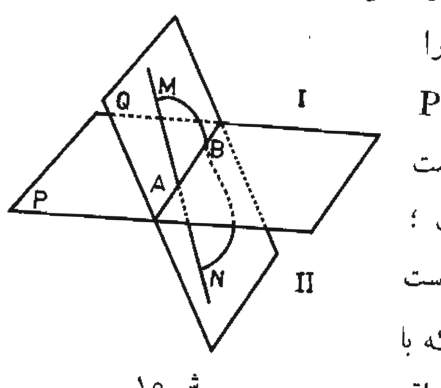
را بعداً خواهیم دید) ، در این صورت آنها را **متوازی** می‌نامند (شکل ۸) ؛ (فراموش نشود که خط راست و صفحه هر دو نامحدودند) .

۸ـ اوضاع نسبی دو خط راست درفضا ـ دوخط راست D و Δ را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ A را روی خط Δ اختیار کرده و فرض می‌کنیم که A روی D واقع نباشد و از نقطهٔ A و خط D صفحهٔ P را می‌گذرانیم (شکل ۹) ؛ دو حالت ممکن است رخ دهد: اولاً خط Δ درصفحهٔ P واقع است دراین صورت خطوط D و Δ که در یك صفحه واقعند یا **متقاطعند** یا **متوازی** . ثانیاً خط Δ صفحهٔ P را قطع می‌کند در این صورت خطوط D و Δ نه متقاطعند و نه متوازی ؛ این دو خط را **متنافر** می‌نامند .

ش ۹

فصل مشترك دو صفحه

۹ـ قضیه ـ اگر دوصفحهٔ متمایز P و Q یك نقطهٔ مشترك مانند A داشته باشند دارای یك خط راست مشترك خواهند بود .



ش ۱۰

در صفحهٔ Q می‌توان نقطهٔ M را چنان اختیار کرد که در صفحهٔ P واقع نباشد؛ دراین صورت خط راست MA در صفحهٔ Q واقع است ؛ حال نقطهٔ N را روی خط راست MA طوری اختیار می‌کنیم که با M در دو طرف صفحهٔ P واقع

باشند و این دو نقطه را بوسیلهٔ یك خط منحنی اختیاری واقع درصفحهٔ Q که از A نگذرد به هم وصل می‌کنیم (شکل ۱۰)؛ این خط منحنی صفحهٔ P را لااقل در یك نقطه مانند B قطع می‌کند (شمارهٔ ۱)؛ پس دو صفحهٔ P و Q در دو نقطهٔ A و B مشترکند و خط راست AB در هر دو صفحه واقع است.

دو صفحهٔ متمایز P و Q نمی‌توانند نقطهٔ مشترك دیگری در خارج خط راست AB داشته باشند وگرنه بر هم منطبق خواهند شد.

۱۰ ـ اوضاع نسبی دو صفحه ـ ازقضیهٔ شمارهٔ ۹ معلوم می‌شود که دو صفحهٔ متمایز یا یکدیگر را در یك خط راست قطع می‌کنند، یا نقطهٔ مشترك ندارند. در حالت اول دو صفحه را **متقاطع** و خط راست مزبور را **فصل مشترك** آنها می‌گویند (شکل ۱۰)، و در حالت دوم دو صفحه را **متوازی** می‌نامند (شکل۱۱). وجود صفحات متوازی را بعداً خواهیم دید.

ش ۱۱

۲ ـ خطوط راست و صفحات متوازی

خطوط متوازی در فضا

۱۱ـ قضیه ـ از نقطهٔ A واقع در خارج خط راست D می‌توان یك خط راست به موازات آن رسم‌کرد و بیش از یکی نمی‌توان.

از نقطهٔ A و خط D فقط یك صفحه می‌گذرد که آن را P

می‌نامیم (شکل ۱۲)؛ هر خط راست که از نقطهٔ A به موازات خط D رسم شود، طبق تعریف خطوط متوازی، باید در صفحهٔ P واقع باشد و در این صفحه از نقطهٔ A می‌توان یك خط به موازات D رسم کرد و بیش از یکی نمی‌توان رسم کرد (اصل اقلیدس).

ش ۱۲

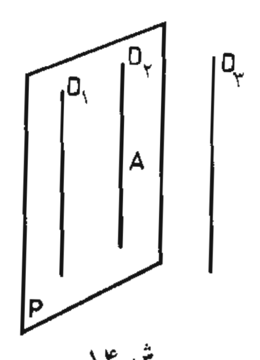
۱۲ـ قضیه ـ اگر دو خط راست با هم موازی باشند هر صفحه که یکی از آنها را قطع کند دیگری را هم قطع می‌کند.

فرض کنیم که D و D' دو خط راست متوازی باشند و صفحه‌ای مانند P خط D را در نقطه‌ای مانند A قطع کرده باشد (شکل ۱۳)؛ صفحهٔ Q که دوخط متوازی D و D' درآن واقعند با صفحهٔ P درنقطهٔ A مشترك است پس این دو صفحه در خط راستی مانند Δ که ازنقطهٔ A گذشته است متقاطع هستند (شمارهٔ ۹)، و در صفحهٔ Q خط Δ که خط D را قطع‌کرده است خط موازی با آن یعنی D' را نیز درنقطه‌ای مانند A' قطع می‌کند؛ نقطهٔ A' هم روی خط D' واقع است و هم در صفحهٔ P و ازطرف دیگر خط D' نمی‌تواند بتمامی در صفحهٔ P واقع باشد زیرا دراین صورت D هم درصفحهٔ P واقع خواهد بود و این ممکن نیست؛ بنابراین صفحهٔ P خط D' را در نقطهٔ A' قطع می‌کند.

ش ۱۳

۱۳ - قضیه - دو خط راست که با یك خط راست موازی باشند خودشان متوازیند .

فرض می‌کنیم که دو خط D_1 و D_2 با خط D_3 موازی باشند؛ باید ثابت کنیم که D_1 و D_2 متوازیند (شکل ۱۴) .



ش ۱۴

اولا - D_1 و D_2 در یك صفحه واقعند ، زیرا اگر بر خط D_1 و نقطهٔ A متعلق به خط D_2 یك صفحه بگذرانیم این صفحه شامل خط D_2 خواهد بود ، چه اگر شامل آن نباشد باید آن را قطع کند و اگر آن را قطع کند خط D_3 را نیز قطع خواهد کرد (شمارهٔ ۱۲) و اگر D_3 را قطع کند باید D_1 را هم قطع کند و این ممکن نیست .

ثانیاً - D_1 و D_2 یکدیگر را قطع نمی‌کنند ، زیرا اگر متقاطع باشند از نقطهٔ تقاطع آنها دو خط به موازات D_3 رسم شده است و این ممکن نیست (شمارهٔ ۱۱) پس D_1 و D_2 متوازیند .

زاویهٔ دو خط

۱۴ - می‌گویند که دو نیم‌خط AX و A'X' که بر دو خط راست متوازی واقع هستند دارای یك جهت (یا متحدالجهت یا ممتد در یك جهت) می‌باشند هرگاه در صفحهٔ این دو خط متوازی ، دو نیم‌خط مزبور در یك طرف خط AA' که دو مبدأ آنها را به‌هم وصل می‌کند واقع باشند (شکل ۱۵) .

۱۵ - قضیه - دو زاویه که اضلاعشان نظیر بنظیر متوازی و ممتد در یك جهت باشند متساویند .

ش ۱۵

دو زاویهٔ xOy و x'O'y' را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که Ox با O'x' و همچنین Oy با O'y' موازی و دارای یك جهت باشند ؛ روی نیم‌خطهای Ox و O'x' بترتیب نقاط A و A' را طوری اختیار می‌کنیم که OA و O'A' با هم مساوی باشند و روی نیم‌خطهای Oy و O'y' بترتیب دو نقطهٔ B و B' را طوری می‌گیریم که OB با O'B' مساوی باشد وقطعه خطهای OO'، AA'، BB' ، AB و A'B' را رسم می‌کنیم ؛ هریك از دو چهارضلعی OAA'O' و OBB'O' متوازی‌الاضلاع است ؛ زیرا دوضلع روبروی آنها هم متساوی و هم متوازیند ، بنابراین قطعه‌خطهای AA' و BB' هر دو با OO' مساوی وموازیند، پس خودشان هم متساوی و متوازی می‌باشند ، یعنی شکل ABB'A' متوازی‌الاضلاع است و $AB=A'B'$ ؛ حال می‌گوییم که دو مثلث OAB و O'A'B' که اضلاعشان نظیر بنظیر با هم مساویند متساوی می‌باشند و :

ش ۱۶

$$\widehat{AOB}=\widehat{A'O'B'}$$

۱۶ ـ نتیجه :

اولا ـ اگر اضلاع دو زاویه نظیر بنظیر با هم موازی و مختلف ـ الجهت باشند آن دو زاویه متساویند ؛ مثل دو زاویهٔ xOy و $u'O'v'$ در شکل ۱۷ .

ثانیاً ـ اگر یك ضلع از یك زاویه با یك ضلع از زاویهٔ دیگر موازی و دارای یك جهت باشند و دو ضلع دیگرشان متوازی ولی مختلف‌الجهت باشند آن دو زاویه مکمّل یکدیگرند ؛ مانند دو زاویهٔ xOy و $v'O'x'$ در شکل ۱۷ .

۱۷ـ زاویهٔ دو خط متنافر ـ اگر D و D' دوخط راست متنافر باشند و ازنقطهٔ دلخواه O خطوط Δ و Δ' را به موازات آنها رسم کنیم (شکل۱۸) ، ازتقاطع این دوخط با یکدیگر چهار زاویهٔ محدب پدیدمی‌آیدکه دوبدو باهم مساویند یا مکمّل یکدیگرند واندازهٔ این زوایا (نظربه شماره‌های ۱۵و۱۶) بستگی به‌موضع نقطهٔ O ندارد ؛ هر یك از این زوایا را زاویهٔ دو خط متنافر D و D' می‌نامند .

ش ۱۷

ش ۱۸

زاویهٔ دوخط فضایی ، یکی از چهار زاویهٔ بین دو خطی است‌که از یك نقطهٔ دلخواه به موازات دو خط فضایی رسم شوند .

اگر یکی از چهار زاویهٔ مزبور قائمه باشد سه زاویهٔ دیگر نیز قائمه خواهند بود و در این صورت دو خط متنافر D و D' را **عمود بر هم*** می‌گویند .

در هندسهٔ فضایی وقتی می‌گوییم که دو خط بر هم عمودند ممکن است این دو خط متقاطع یا متنافر باشند .

اگر دو خط D و D' بر هم عمود نباشند ، وقتی از زاویهٔ آنها بطور مطلق گفتگو می‌شود ، مقصود زاویهٔ حادهٔ آنهاست .

۱۸ ـ نتیجه ـ برای بدست‌آوردن زاویهٔ دوخط، می‌توان به‌جای یکی از آنها خطی موازی با آن را اختیار کرد ؛ به عبارت دیگر ، **دو خط که با هم موازی باشند با هر خط دلخواه دیگر زوایای متساوی پدید می‌آورند .**

بخصوص اگر دو خط با هم موازی باشند هرخط‌که بریکی‌ازآنها عمود باشد بردیگری نیز عمود است .

و نیز اگر دو خط بر هم عمود باشند هر خط که با یکی ازآنها موازی باشد بر دیگری عمود است .

خط و صفحهٔ متوازی

۱۹ ـ تعریف ـ یك‌خط راست ویك صفحه را متوازی می‌گویند هرگاه نقطهٔ مشترك نداشته باشند (فراموش نشود که خط راست و صفحه

---

* وقتی دوخط متقاطع برهم عمود باشند خودشان مستقیماً چهار زاویهٔ قائمه پدید می‌آورند؛ اما اگردوخط متنافر برهم عمود باشند برای پدیدآوردن زوایای قائمهٔ آنها باید ازیك نقطهٔ دلخواه دوخط به موازات آنها رسم‌کرد .

هر دو نامحدودند) ؛ وجود چنین خط و صفحه‌ای از قضیهٔ زیر محقق می‌شود :

۲۰ ـ قضیه ـ هر خط که موازی با یك خط راست از صفحه‌ای باشد با آن صفحه موازی است یا در آن صفحه واقع است .

فرض کنیم که خط Δ باخط D متعلق به صفحهٔ P موازی باشد (شکل ۱۹) ؛ اگر صفحهٔ P خط Δ راقطع کند باید خط‌موازی با آن یعنی D را نیز قطع کند (شمارهٔ ۱۲) و این ممکن نیست ، زیرا D در صفحهٔ P واقع است ؛ پس خط Δ که با صفحهٔ P متقاطع نیست یا با آن موازی یا در آن واقع است .

ش ۱۹

تبصره ـ از قضیهٔ شمارهٔ ۲۰ معلوم می‌شود که **از یك نقطهٔ واقع درخارج یك صفحه خطوط راست بیشماری به‌موازات آن صفحه می‌توان رسم کرد** . در واقع اگر نقطهٔ A در خارج صفحهٔ P باشد (شکل ۱۹) هر خط که از نقطهٔ A به موازات یکی از خطوط صفحهٔ P رسم شود با P موازی است .

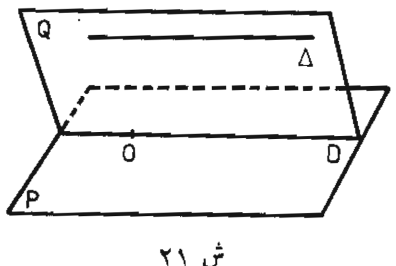
۲۱ ـ قضیه ـ اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد و از یکی از نقاط آن صفحه خطی به‌موازات آن خط رسم‌کنیم ، خط مرسوم به‌تمامی در صفحهٔ مزبور واقع خواهد شد .

فرض می‌کنیم که خط Δ با صفحهٔ P موازی و نقطهٔ A در صفحهٔ P واقع باشد (شکل ۲۰) ؛ از نقطهٔ A خط D را به موازات Δ رسم

می‌کنیم ؛ اگر خط D درصفحهٔ P واقع نباشد با آن در نقطهٔ A متقاطع است و در این صورت خط Δ هم با صفحهٔ P متقاطع می‌باشد (شمارهٔ ۱۲) واین خلاف فرض است ؛ پس خط D درصفحهٔ P واقع است .

ش ۲۰

۲۲ـ قضیه ـ اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد هرصفحه‌که بر آن خط ویکی از نقاط صفحهٔ اول بگذرد این صفحه را برفصل مشترکی موازی با خط مزبور قطع می‌کند .



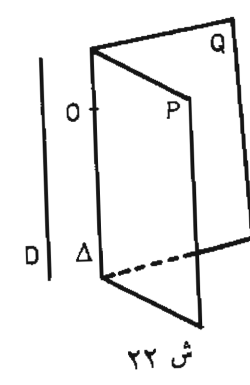
ش ۲۱

فرض می‌کنیم که خط Δ با صفحهٔ P موازی و نقطهٔ O در صفحهٔ P واقع باشد (شکل۲۱)؛ ازنقطهٔ O و خط Δ صفحهٔ Q را می‌گذرانیم وفصل مشترك آن را باصفحهٔ P خط D می‌نامیم؛ خطوط D و Δ که در صفحهٔ Q واقع هستند نمی‌توانند متقاطع‌باشند زیرا دراین صورت نقطهٔ تقاطع در صفحهٔ P واقع می‌شود ، یعنی‌خط Δ صفحهٔ P را قطع می‌کند واین خلاف فرض است ؛ پس D با Δ موازی است .

۲۳ـ قضیه ـ هر خط‌که با دو صفحهٔ متقاطع موازی باشد با فصل مشترك آن دوصفحه موازی است .

فرض می‌کنیم که خط D با دو صفحهٔ متقاطع P و Q موازی باشد و فصل مشترك صفحات P و Q را خط Δ می‌نامیم (شکل ۲۲) ؛ اگر از نقطهٔ O واقع بر خط Δ خطی به موازات D رسم کنیم ،

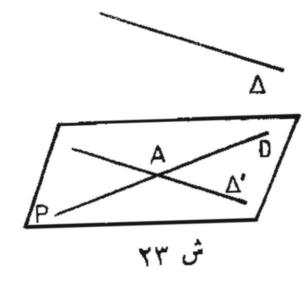
این خط نظر به شمارهٔ ۲۱ باید هم در صفحهٔ P واقع باشد وهم درصفحهٔ Q پس برفصل‌مشترك آنها یعنی برخط Δ منطبق است یعنی Δ و D با هم موازیند .



ش ۲۲

۲۴ ـ مسئله ـ دوخط D و Δ مفروضند ؛ می‌خواهیم بر خط D صفحه‌ای به موازات Δ مرور دهیم .

نقطه‌ای مانند A روی خط D اختیارکرده وازآن نقطه خط Δ' را موازی با Δ می‌کشیم ؛ اگر خطوط D و Δ متنافر باشند خطوط D و Δ' متقاطع هستند و صفحهٔ P که به وسیلهٔ دو خط متقاطع D و Δ' مشخص می‌شود جواب مسئله است و مسئله دراین حالت فقط همین یك جواب را دارد . در واقع اولاً صفحهٔ P که شامل Δ' است با Δ موازی است و ثانیاً هرصفحه که بر D بگذرد و با Δ موازی باشد شامل Δ' نیز می‌شود ، یعنی بر صفحهٔ P منطبق خواهد بود .

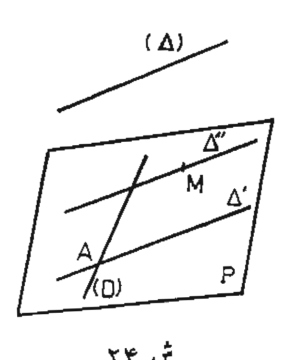


ش ۲۳

اگر خطوط D و Δ متقاطع باشند صفحهٔ P شامل خط Δ خواهد بود و مسئله در این حالت جواب ندارد .

اگر خطوط D و Δ متوازی باشند هر صفحه که بر D بگذرد با Δ موازی خواهد بود و در این حالت مسئله بینهایت جواب دارد .

۲۵ ـ تبصره ـ دو خط متنافر D و Δ را در نظر می‌گیریم وبرخط D صفحهٔ P رابه موازات Δ مرور می‌دهیم (شکل۲۴) ؛ هر نقطه مانند A که روی خط D اختیار شود و از آن نقطه خط Δ' را به موازات خط Δ رسم‌کنیم ، خط Δ' درصفحهٔ P واقع خواهد بود؛ بنابراین صفحهٔ P شامل جمیع خطوطی است که با Δ موازی و با D متقاطع باشند ؛ حال اگر نقطهٔ دلخواهی مانند M در صفحهٔ P اختیار کرده وازآن نقطه خط Δ'' را به موازات Δ رسم‌کنیم ، این خط درصفحهٔ P واقع است و خط D را قطع می‌کند ؛ پس از هر نقطه از صفحهٔ P می‌توان خطی به موازات Δ رسم‌کردکه D را قطع‌کند .



ش ۲۴

۲۶ ـ از دو حکم فوق نتیجه می‌شودکه :

اگر دو خط راست D و Δ دریك صفحه‌نباشند مکان هندسی خطوط راستی‌که از نقاط مختلف D به موازات Δ رسم شوند صفحه‌ای است‌که بر D به موازات Δ مرورکند * .

دقت‌کنید : دراینجا قبلا دوحکم را ثابت‌کردیم یکی اینکه صفحهٔ P شامل جمیع خطوط راستی است که دارای شرایط معینی هستند و دیگر اینکه از هر نقطهٔ واقع در صفحهٔ P می‌توان خطی رسم‌کردکه دارای همان شرایط باشد و سپس این دو حکم را در عبارت بعد به صورت یك حکم بیان‌کردیم .

---

* درهندسهٔ فضایی هرگاه سطحی شامل جمیع خطوطی (یا نقاطی) باشد که دارای شرایط معینی باشند آن سطح را مکان هندسی خطوط (یا نقاط) مزبور می‌گویند .

توجه کنید ! اگر نقطهٔ A روی خط D حرکت کند خط Δ' در مواضع مختلف خود از جمیع نقاط صفحهٔ P می‌گذرد و **می‌گویند که خط Δ' صفحهٔ P را می‌پیماید یا آن را ایجاد می‌کند .**

صفحات متوازی

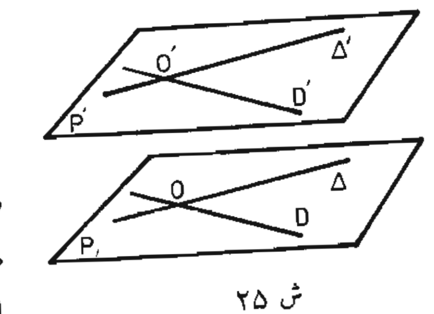
۲۷ – می‌دانیم که **دو صفحه را که نقطهٔ مشترك نداشته باشند متوازی می‌نامند** (شمارهٔ ۱۰) . واضح است که اگر دو صفحه متوازی باشند هر خط راست که در یکی از آنها واقع باشد با دیگری موازی است .

وجود صفحات متوازی از قضیهٔ زیر محقق می‌شود :

۲۸ – قضیه – از هر نقطه که در خارج یك صفحه واقع باشد می‌توان یك صفحه به موازات آن گذراند و بیش از یکی نمی‌توان .

صفحهٔ P و نقطهٔ O' را در خارج آن در نظر می‌گیریم .

اولا گذراندن یك صفحهٔ موازی ممکن است : دو خط اختیاری و متقاطع D و Δ را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم و از نقطهٔ O' خطوط D' و Δ' را بترتیب به موازات آنها رسم می‌کنیم و براین دو خط یك صفحه می‌گذرد که آن را P' می‌نامیم (شکل ۲۵). صفحهٔ P' با صفحهٔ P موازی است زیرا اگر صفحهٔ P' صفحهٔ P را قطع کند ، فصل مشترك آنها لااقل یکی از دو خط D'



ش ۲۵

و Δ' مثلا D' را قطع خواهد کرد و در این صورت خط D' با صفحهٔ P متقاطع خواهد شد و این ممکن نیست زیرا خط D' با خط D و بنابراین با صفحهٔ P موازی است .

ثانیاً بیش از یك صفحهٔ موازی نمی‌توان گذراند: اگر صفحه‌ای از O' بگذرد و با صفحهٔ P موازی باشد با خطوط D و Δ موازی است (شمارهٔ ۲۷) و بنابراین شامل خطوط D' و Δ' که از O' به موازات D و Δ رسم شده‌اند می‌باشد (شمارهٔ ۲۱) یعنی بر صفحهٔ P' منطبق است .

۲۹ – تبصره – از استدلال فوق ضمناً طریقهٔ گذراندن صفحه‌ای که از نقطهٔ O' واقع در خارج صفحهٔ P به موازات آن می‌توان گذراند نیز نتیجه می‌شود : از نقطهٔ O' دو خط متمایز به موازات صفحهٔ P رسم می‌کنیم ، صفحه‌ای که از این دو خط می‌گذرد جواب مسئله است .

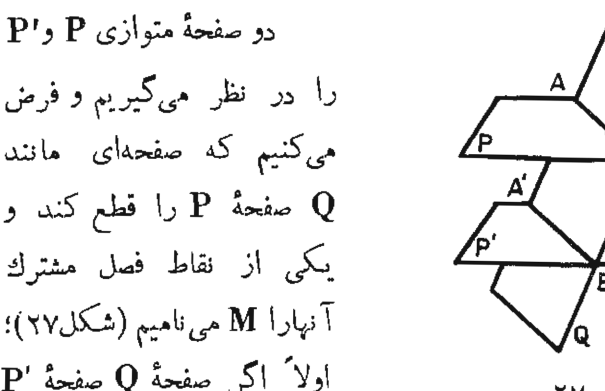
۳۰ – نتیجهٔ ۱ – اگر دو صفحه با صفحهٔ ثالثی موازی باشند خودشان متوازیند .

زیرا اگر صفحات Q و R که هردو با صفحهٔ P موازی فرض می‌شوند نقطهٔ مشترکی داشته باشند از این نقطه دو صفحه به موازات P رسم شده است و این ممکن نیست (شکل ۲۶) .

ش ۲۶

۳۱ – نتیجهٔ ۲ – اگر دو صفحه متوازی باشند ، هر صفحه که یکی از آنها را قطع کند ، دیگری را هم قطع می‌کند و دو فصل مشترك با هم موازیند .

دو صفحهٔ متوازی P و P′ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که صفحه‌ای مانند Q صفحهٔ P را قطع کند و یکی از نقاط فصل مشترك آنهارا M می‌نامیم (شکل۲۷)؛ اولاً اگر صفحهٔ Q صفحهٔ P′ را قطع نکند برصفحه‌ای که ازنقطهٔ M به موازات P′ رسم‌شود یعنی بر صفحهٔ P منطبق خواهد شد واین خلاف فرض است؛ پس‌صفحهٔ Q صفحهٔ P′ را قطع می‌کند .



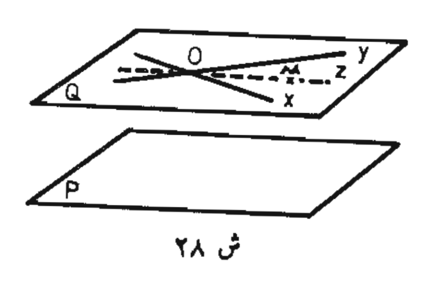
ش ۲۷

ثانیاً فصل‌مشترکهای صفحات P و P′ باصفحهٔ Q یعنی خطوط AB و A′B′ که هردو در صفحهٔ Q واقع هستند نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند ؛ زیرا اگر متقاطع باشند نقطهٔ تقاطع آنها هم در صفحهٔ P و هم در صفحهٔ P′ واقع خواهد شد و این ممکن نیست ؛ پس AB و A′B′ متوازیند .

۳۲ ـ قضیه ـ مکان هندسی خطوطی که از یك نقطه مانند O به موازات صفحهٔ P رسم شوند ، صفحه‌ای است که از O به موازات P رسم شود .

صفحهٔ P و نقطهٔ O را درخارج آن درنظر می‌گیریم و ازنقطهٔ O دوخط راست متمایز Ox و Oy را به موازات صفحهٔ P رسم می‌کنیم ؛ صفحهٔ Q که ازاین دوخط راست می‌گذرد نظر بهشمارهٔ ۲۹ با صفحهٔ P موازی است (شکل ۲۸)

اولاً هرخط دیگرمانند Oz که ازنقطهٔ O بهموازات صفحهٔ P رسم شود در صفحهٔ Q واقع است ؛ زیرا صفحه‌ای که به‌وسیلهٔ دو خط متقاطع Oz و Oy مشخص می‌شود با صفحهٔ P موازی و بنابراین برصفحهٔ Q منطبق است .

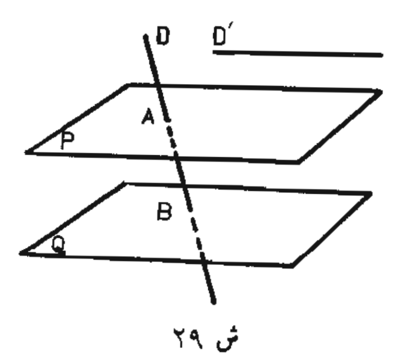


ش ۲۸

ثانیاً هر نقطهٔ دلخواه مانند M که در صفحهٔ Q اختیار کنیم خط OM که در صفحهٔ Q واقع است با صفحهٔ P موازی است (شمارهٔ ۲۷) یعنی ازهر نقطهٔ واقع درصفحهٔ Q می‌توان خطی‌رسم‌کردکه از O بگذرد وبا صفحهٔ P موازی باشد و قضیه ثابت است .

۳۳ ـ نتیجهٔ ۱ ـ اگر دو صفحه متوازی باشند ، هر خطکه یکی از آنها را قطع کند دیگری را قطع خواهد کرد .

اگر دو صفحهٔ P و Q با هم موازی‌باشند وخط D صفحهٔ P را قطع‌کند (شکل۲۹) ، خط D صفحهٔ Q را نیزقطع خواهدکرد ، زیرا اگرآن‌را قطع‌نکند درصفحهٔ P واقع خواهد شد (شمارهٔ ۳۲) و این خلاف فرض است .



ش ۲۹

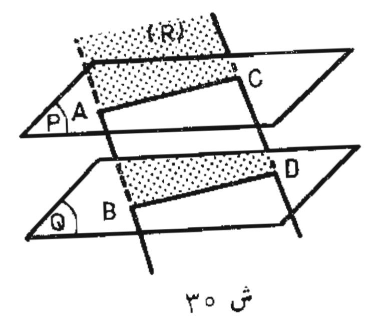
۳۴ ـ نتیجهٔ ۲ ـ اگر دوصفحه متوازی باشند ، هر خطکه با یکی از آنها موازی باشد با دیگری نیز موازی است .

اگر P و Q دو صفحهٔ متوازی وخط D′ باصفحهٔ P موازی باشد

(شکل ۲۹) ، D' با صفحهٔ Q نیز موازی خواهد بود ، زیرا اگر Q را قطع کند P را نیز باید قطع کند (شمارهٔ ۳۳) و این خلاف فرض است .

خواص متری صفحات موازی

۳۵ـ قضیه ـ قطعه خطهای متوازی که بین دوصفحهٔ متوازی محصور باشند متساویند .



ش ۳۰

دو صفحهٔ متوازی P و Q را در نظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم که قطعه خطهای متوازی AB و CD بین این دوصفحه‌محصور باشند(شکل ۳۰) ؛ بر دو خط متوازی AB و CD صفحهٔ R را مرور می‌دهیم؛ این صفحه ، صفحات متوازی P و Q را در خطهای AC و BD که با هم موازیند قطع می‌کند (شمارهٔ ۳۱) ، پس چهارضلعی $ABDC$ متوازی‌الاضلاع است و $AB=CD$.

۳۶ـ تبصره ـ اگر خطی مانند AC با صفحهٔ Q موازی‌باشد ، این خط در صفحه‌ای مانند P که با Q موازی است واقع است (شکل ۳۰) و بنابراین از قضیهٔ شمارهٔ ۳۵ نتیجه می‌شود:

قطعه خطهای متوازی که بین یك خط و یك صفحهٔ متوازی محصور باشند متساویند .

۳۷ـ قضیهٔ تالس درفضا ـ صفحات متوازی هر دو خطی را که قطع کنند قطعه‌خطهای متناسب جدا می‌کنند . مثلا اگر سه صفحهٔ متوازی P ، Q و R خطی مانند Δ را بترتیب در نقاط A ، B و C و خط دیگری مانند Δ' را بترتیب در نقاط A' ، B' و C' قطع کنند رابطهٔ

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

برقرار است .

ازنقطهٔ A خط Ax را به موازات Δ' رسم می‌کنیم (شکل ۳۱) تاصفحات Q و R را بترتیب درنقاط D و E قطع کند ؛ BD باخط CE موازی‌است(شمارهٔ۳۱) و به موجب قضیهٔ تالس داریم :

ش ۳۱

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}$$

اما $AD=A'B'$ و $DE=B'C'$ (شمارهٔ ۳۵) بنابراین :

$$\boxed{\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}}$$

۳ ـ خط و صفحهٔ عمود برهم

۳۸ ـ اگر دو گونیا را طوری قرار دهیم که یك ضلع آنها مانند OA و OA' از زاویهٔ قائمه‌شان درکنار هم‌قرارگیرند و دو ضلع دیگر

زاویهٔ قائمهٔ آنها یعنی OB و OB' (شکل ۳۲) روی یك خط راست نباشند ، از دو ضلع OB و OB' یك صفحه‌مانند P می‌گذرد

ش ۳۲

و خط OA یا OA' بر دو خط متقاطع OB و OB' از صفحهٔ P عمود است ؛ در قضیهٔ زیر ثابت می‌کنیم که خط OA بر هر خط راستی که از نقطهٔ O در صفحهٔ P رسم شود نیز عمود می‌باشد.

۳۹ ـ قضیه ـ اگر خطی صفحه‌ای را قطع کند و بر دو خط متمایز که از پایش در آن صفحه رسم شده‌باشند عمود باشد ، برجمیع‌خطوط راستی که در آن صفحه رسم شوند نیز عمود است .

فرض می‌کنیم که خط Δ در نقطهٔ O بر دوخط متقاطع Ox و Oy از صفحهٔ P عمود باشد (شکل۳۳) .

اولاً خط Δ بر هر خط دلخواه مانند Oz که‌از نقطهٔ O در صفحهٔ P رسم شود عمود است .

ش ۳۳

روی خط Δ دو قطعه‌خط متساوی OA و OA' راجدا می‌کنیم و در صفحهٔ P قاطعی می‌کشیم‌که خطوط Ox ، Oy و Oz را بترتیب در نقاط B ، C و M قطع کند ؛ خطوط Ox و Oy هر دو

عمودمنصف قطعه‌خط AA' هستند ، پس $AB=A'B$ و $AC=A'C$ و بنابراین دو مثلث ABC و $A'BC$ (در حالت سه ضلع) متساویند و داریم : $\widehat{ABM}=\widehat{A'BM}$ و از اینجا نتیجه می‌شود که دو مثلث ABM و $A'BM$ (درحالت دوضلع و زاویهٔ بین‌آنها) متساویند و از تساوی دو مثلث اخیر معلوم می‌شود که $AM=A'M$ ، یعنی مثلث AMA' متساوی‌الساقین است و لذا میانهٔ آن OM برقاعدهٔ آن ، یعنی AA' ، عمود است یعنی Δ بر Oz عمود می‌باشد .

ثانیاً خط Δ بر هر خط دلخواهی مانند D که در صفحهٔ P رسم شود و از نقطهٔ O نگذرد نیز عمود است .

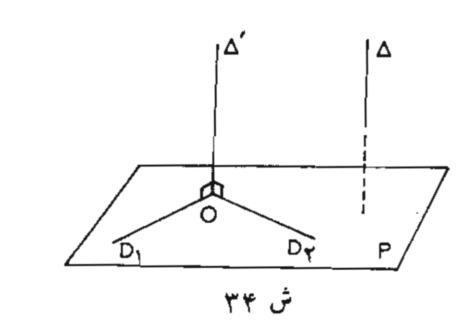
در واقع اگر از نقطهٔ O خط Oz را به موازات خط D رسم‌کنیم ، این خط در صفحهٔ P واقع خواهد شد و طبق آنچه در قسمت اول‌گفتیم Δ بر Oz عمود است ،پس برخط D که با Oz موازی می‌باشد نیزعمود است (شمارهٔ ۱۸) .

۴۰ـ تعریف ـ یك خط راست را در صورتی بر یك صفحه عمود می‌گویند که برجمیع خطوط آن صفحه عمود باشد .

۴۱ ـ قضیه ـ شرط لازم و کافی برای آنکه خطی بر یك صفحه عمود باشد این است که بر دوخط متقاطع از آن صفحه عمود باشد .

اولا شرط لازم است : اگر خط Δ بر صفحهٔ P یعنی برجمیع خطوط آن عمود باشد ، بر دو خط متقاطع واقع در آن عمود است .

ثانیاً شرط کافی است : اگر خط Δ بر دو خط متقاطع دلخواه OD_1 و OD_2 واقع در صفحهٔ P عمود باشد و از نقطهٔ O خط Δ' را



ش ۳۴

به موازات Δ رسم کنیم (شکل ۳۴) ، Δ' بر OD_1 و OD_2 عمود خواهد بود (شمارهٔ ۱۸) و Δ' نمی‌تواند در صفحهٔ P واقع باشد (وگرنه در صفحهٔ P از یك نقطهٔ O دو عمود بر یك خط رسم شده است و این ممکن نیست) پس Δ' صفحهٔ P را قطع می‌کند و نظر به شمارهٔ ۳۹ ، چون بر دو خط متمایز OD_1 و OD_2 که از پایش در این صفحه رسم شده‌اند عمود است ، برجمیع خطوط صفحهٔ P عمود می‌باشد ؛ بنابراین خط Δ نیز صفحهٔ P را قطع می‌کند (شمارهٔ۱۲) و بر جمیع خطوط آن عمود است (شمارهٔ۱۸) ، یعنی Δ بر P عمود می‌باشد .

۴۲ ـ تبصره ـ به جای خطوط OD_1 و OD_2 می‌توان خطوطی موازی با آنها اختیار کرد ؛ یعنی : اگر خط Δ بر دو خط غیرمتوازی‌که با صفحهٔ P موازی باشند عمود باشد برصفحهٔ P نیز عمود است .

۴۳ـ نتیجهٔ ۱ـ اگردوخط با هم موازی‌باشند ، هرصفحه‌که بریکی از آنها عمود باشد بر دیگری نیز عمود است (شکل ۳۴) .

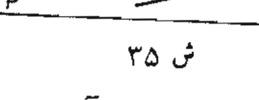
۴۴ـ نتیجهٔ ۲ـ اگر دوصفحه با هم موازی باشند ، هرخط که بر یکی از آنها عمود باشد بر دیگری نیز عمود است .

دوصفحهٔ متوازی P و P' (شکل۳۵) ودوخط متقاطع D_1 و D_2 را درصفحهٔ P درنظرمی‌گیریم وازیك‌نقطهٔ دلخواه واقع درصفحهٔ P' دو خط D'_1 و D'_2 رابترتیب به موازات D_1 و D_2 رسم می‌کنیم؛ این‌دوخط درصفحهٔ P' واقع می‌شوند (شمارهٔ ۲۱). حال‌اگرخط Δ برصفحهٔP عمود

باشد بر خطوط D_1 و D_2 و بنابر این بر خطوط D'_1 و D'_2 عمود است، پس برصفحهٔ P' نیز عمود می‌باشد .

ش ۳۵

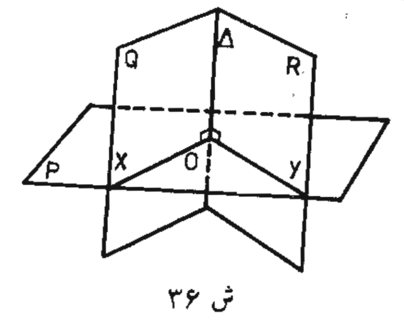
۴۵ـ فرع ـ اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد بر جمیع خطوطی که به موازات آن صفحه رسم شوند نیز عمود است .



صفحات عمود بر یك خط راست

۴۶ ـ وجود صفحات عمود بر یك خط راست از قضیهٔ زیر محقق می‌شود :

قضیه ـ از یك نقطهٔ معلوم می‌توان یك صفحه بر یك خط راست معلوم عمود کرد و بیش از یکی نمی‌توان .



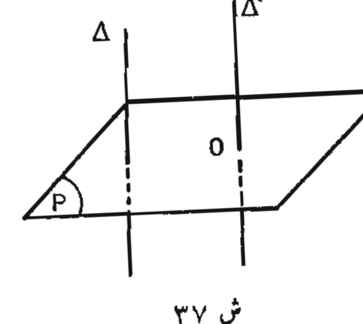
ش ۳۶

حالت اول ـ نقطه روی خط واقع است ـ اولاً برای آنکه از نقطهٔ O واقع برخط Δ یك صفحهٔ عمود برخط Δ بسازیم، کافی‌است‌که دو **صفحهٔ متمایز** مانند Q و R بر خط Δ بگذرانیم و از نقطهٔ O در این دو صفحه بترتیب دو خط Ox و Oy را عمود بر Δ رسم کنیم (شکل ۳۶) ؛ صفحهٔ P که از Ox و Oy می‌گذرد بر خط Δ عمود است (شمارهٔ ۴۱).

پس از نقطهٔ O یك صفحه می‌توان بر Δ عمودکرد .

ثانیاً هرصفحهٔ دیگری مانند P' که ازنقطهٔ O برخط Δ عمودشود صفحهٔ Q را در خطی عمود بر Δ قطع خواهدکرد وچون از نقطهٔ O در صفحهٔ Q یك خط بیشتر نمی‌توان عمود بر Δ رسم کرد پس این فصل مشترك بر Ox منطبق است. همچنین فصل مشترك صفحهٔ P' با صفحهٔ R نیز خط Oy است ، یعنی صفحهٔ P' برصفحهٔ P منطبق است؛ پس از نقطهٔ O یك صفحه بیشتر نمی‌توان بر Δ عمود کرد .

حالت دوم ـ نقطه درخارج خط واقع است ـ نقطهٔ O رادرخارج خط Δ در نظر می‌گیریم واز O خط Δ' را به‌موازات خط Δ رسم می‌کنیم؛ هرصفحه‌که بر Δ' عمود باشد بر Δ نیز عمود است و بر عکس (شمارهٔ ۴۳) ؛ لیکن از نقطهٔ O یك صفحه می‌توان بر Δ' عمود کرد و بیش از یکی نمی‌توان (حالت اول) ، پس از نقطهٔ O یك صفحه می‌توان بر Δ عمود کرد و بیش از یکی نمی‌توان .



ش ۳۷

۴۷ ـ نتیجه ـ اگر دو صفحهٔ متمایز بریك خط راست عمود باشند با هم موازیند .

در واقع اگر دو صفحهٔ مزبور متوازی نباشند یکدیگر را قطع می‌کنند و در این صورت از نقاط مشترك آنها دو صفحه برخط مفروض عمود شده است و این ممکن نیست .

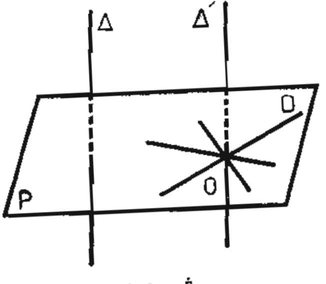
۴۸ ـ قضیه ـ مکان هندسی خطوط راستی که از نقطهٔ معلوم O

بگذرند و بر خط راست مفروض Δ عمود باشند، صفحه‌ای است‌که ازنقطهٔ O برخط Δ عمود شود .

حالت اول ـ نقطهٔ O روی خط Δ واقع است ـ صفحهٔ P را در نقطهٔ O برخط Δ عمود می‌کنیم (شکل ۳۸)؛ اولاً نظر به تعریف شمارهٔ ۴۰ هر خط راست مانند Ox که در صفحهٔ P رسم شود بر خط Δ عمود است . ثانیاً بر عکس اگر خط دیگری مانند Oy از نقطهٔ O بر خط Δ عمود باشد ، در صفحهٔ P واقع است ، زیرا از این خط و خط Ox صفحه‌ای می‌گذردکه برΔ عمود است (شمارهٔ ۴۱) و این صفحه بر P منطبق می‌باشد یعنی Oy در صفحهٔ P واقع است (شکل ۳۸) .

ش ۳۸

حالت دوم ـ نقطهٔ O در خارج خط Δ واقع است ـ از نقطهٔ O خط Δ' را به‌موازات Δ رسم می‌کنیم (شکل ۳۹) ؛ هر خط مانند D که از نقطهٔ O بگذرد و بر Δ' عمود باشد بر Δ نیز عمود است و برعکس هر خط که از O بر Δ عمود شود بر Δ' نیز عمود می‌باشد ؛ پس مکان مذکور عبارت است از صفحهٔ P که از نقطهٔ O بر Δ' و بنابراین بر Δ عمود شود .

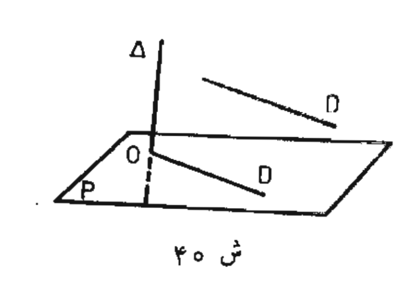


ش ۳۹

۴۹ ـ نتیجه ـ اگر یك خط راست مانند D ویك صفحه مانند P هر دو بر یك خط راست مانند Δ عمود باشند یا اینکه خط D باصفحهٔ P

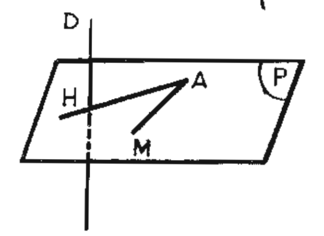
موازی است یا در آن واقع است .

اگر یکی از نقاط خط D در صفحهٔ P واقع باشد نظر به شمارهٔ ۴۸ خط D بتمامی در صفحهٔ P واقع می‌شود ، پس خط D یا در صفحهٔ P واقع است یا با صفحهٔ P نقطهٔ مشترکی ندارد ، یعنی با آن موازی است (شکل ۴۰) .



ش ۴۰

۵۰ ـ عمود وارد از یك نقطه بر یك خط راست ـ از یك نقطه مانند A می‌توان خطهای بیشماری در فضا بر خط راست D عمود کرد . دیدیم که جمیع این خطوط عمود ، در صفحه‌ای که از نقطهٔ A بر خط D عمود شود واقعند (شکل ۴۱) ؛

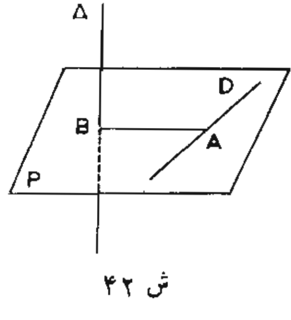


ش ۴۱

اگر نقطهٔ A روی خط D نباشد فقط یکی از عمودها خط D را در نقطه‌ای که آن را H می‌نامیم قطع می‌کند ؛ می‌گویند که **خط AH عمود وارد از نقطهٔ A بر خط D می‌باشد** ؛ عمود AH در صفحه‌ای که از نقطهٔ A و خط D می‌گذرد واقع است ؛ چنانکه در هندسهٔ مسطحه دیده‌ایم ، قطعه‌خط AH را **فاصلهٔ نقطهٔ A از خط D** می‌نامند .

۵۱ ـ قضیه ـ شرط لازم وکافی برای‌آنکه بریکی ازدوخط متنافر D و Δ بتوانیم صفحه‌ای بگذرانیم‌که بردیگری عمود شود ، این است‌که این دو خط متنافر برهم عمود باشند .

اولا شرط لازم است ـ فرض می‌کنیم که صفحهٔ P بر خط D بگذرد و عمود بر خط Δ باشد ؛ در این صورت خط Δ بر جمیع خطوط صفحهٔ P و از جمله برخط D عمود است (شکل ۴۲).



ش ۴۲

ثانیا شرط کافی است ـ فرض می‌کنیم که خط D بر خط Δ عمود باشد ؛ از نقطه‌ای مانند A واقع برخط D عمود AB را بر خط Δ وارد می‌کنیم ؛ صفحهٔ P که از دو خط D و AB می‌گذرد بر Δ عمود است ، زیرا Δ بر دو خط D و AB از این صفحه عمود می‌باشد .

۵۲ ـ قضیه ـ مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو نقطهٔ معلوم A و B به یك فاصله هستند صفحه‌ای است که از وسط قطعه‌خط AB می‌گذرد و بر AB عمود است .

این صفحه را **صفحهٔ عمودمنصف** قطعه‌خط AB می‌گویند .

ش ۴۳

وسط قطعه‌خط AB را نقطهٔ O می‌نامیم و از نقطهٔ O صفحهٔ P را بر خط AB عمود می‌کنیم (شکل ۴۳) ؛

اولا اگر نقطهٔ M از A و B به‌یك فاصله باشد ، مثلث MAB متساوی الساقین است و MO عمودمنصف AB است و نقطهٔ M در صفحهٔ P واقع

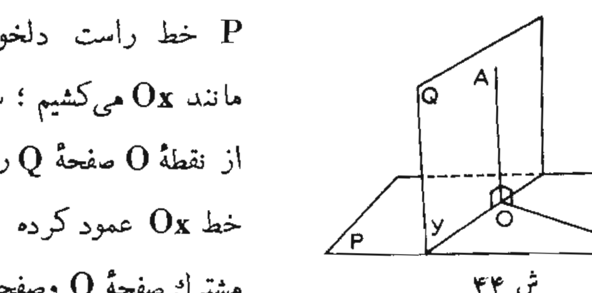
می‌باشد (شمارهٔ ۴۸) .

ثانیاً اگر M نقطه‌ای از صفحهٔ P باشد خط MO بر AB عمود است و چون O وسط AB می‌باشد ، MO عمود منصف قطعه‌خط AB است . یعنی : $MA=MB$.

خط عمود بر یك صفحه

۵۳ ـ قضیه ـ از یك نقطه ، مانند O ، می‌توان یك خط بر یك صفحه ، مانند P ، عمودکرد و بیش از یکی نمی‌توان .

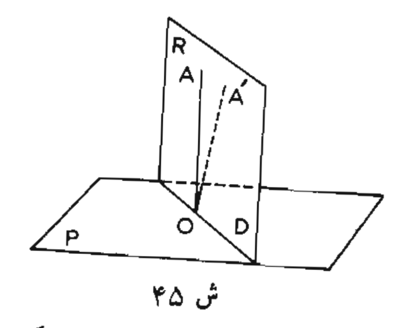
حالت اول ـ نقطهٔ O درصفحهٔ P واقع است ـ از نقطهٔ O درصفحهٔ P خط راست دلخواهی مانند Ox می‌کشیم ؛ سپس از نقطهٔ O صفحهٔ Q را بر خط Ox عمود کرده فصل مشترك صفحهٔ Q وصفحهٔ P را Oy می‌نامیم و در صفحهٔ Q خط OA را عمود بر Oy رسم می‌کنیم (شکل ۴۴) . خط OA بر صفحهٔ P عمود می‌باشد ، زیرا ازیك طرف بر Oy عمود است و از طرف دیگر چون OA درصفحهٔ Q واقع است بر خط Ox نیز عمود است ؛ بنابراین OA بر دو خط از صفحهٔ P عمود است ، یعنی برصفحهٔ P عمود می‌باشد . پس : از نقطهٔ O می‌توان خطی عمود بر صفحهٔ P رسم‌کرد .



ش ۴۴

اگرخط دیگری مانند OA' در نقطهٔ O بر صفحهٔ P عمود شود،

بر این خط و خط OA صفحه‌ای مانند R می‌گذرانیم (شکل ۴۵) ، و اگر فصل مشترك صفحهٔ R را باصفحهٔ P خط D بنامیم ، خط D بر دوخط متقاطع OA و OA' درصفحهٔ R عمودخواهدشد واین‌ممکن نیست . پس : از نقطهٔ O یك خط بیشتر نمی‌توان بر صفحهٔ P عمود اخراج کرد. (وقتی نقطهٔ O در صفحهٔ P واقع باشد می‌گویند که عمود OA از نقطهٔ O برصفحهٔ P اخراج شده است) .



ش ۴۵

حالت دوم ـ نقطهٔ O در خارج از صفحهٔ P واقع است ـ از نقطهٔ O صفحهٔ P' را بموازات صفحهٔ P عبور می‌دهیم . هر خط که بر صفحهٔ P عمود باشد، برصفحهٔ P' نیز عمود خواهد بود و بر عکس (شمارهٔ ۴۴) . و چون از نقطهٔ O فقط یك خط می‌توان برصفحهٔ P' عمود اخراج‌کرد و بیشتر نمی‌توان (حالت اول) ، در مورد صفحهٔ P نیز همینطور است (وقتی نقطهٔ O در خارج صفحهٔ P باشد می‌گویند عمود OH از نقطهٔ O بر صفحهٔ P فرود آمده است و H را پای عمود می‌نامند) .

ش ۴۶

۵۴ ـ نتیجه ـ دو خط عمود بر یك صفحه متوازیند .

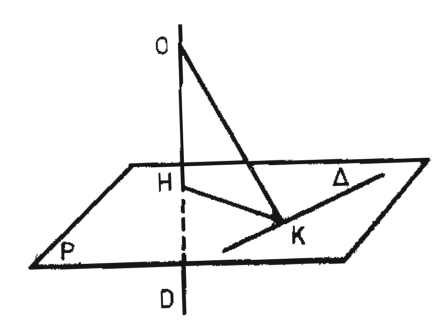
فرض می‌کنیم دو خط D و D' بر صفحهٔ P عمود باشند ؛ از نقطهٔ A واقع بر خط D' خطی بموازات D رسم می‌کنیم (شکل ۴۷)؛

این خط بر صفحهٔ P عمود است (شمارهٔ ۴۳) و بنابراین بر D' منطبق می‌باشد (زیرا از نقطهٔ A یك خط بیشتر نمی‌توان بر صفحهٔ P عمود کرد)؛ پس D و D' متوازیند.

ش ۴۷

قضیهٔ سه عمود

۵۵ ـ قضیه ـ در صفحهٔ P خط راست Δ و نقطهٔ دلخواه H را درنظر می‌گیریم و از نقطهٔ H خط D را بر صفحهٔ P عمود اخراج می‌کنیم و عمود HK را بر خط Δ فرود می‌آوریم؛ هر خط راست‌که از پای این عمود یعنی از نقطهٔ K و از یك نقطهٔ اختیاری O واقع بر خط D بگذرد، بر خط Δ عمود است (شکل ۴۸).



ش ۴۸

چون خط D بر صفحهٔ P عمود می‌باشد بر جمیع خطوط‌آن و ازجمله برخط Δ عمود است؛ حال گوییم که خط Δ از یك طرف بر D عمود است و از طرف دیگر بر HK عمود می‌باشد، پس خط Δ بر صفحهٔ HOK عمود است (شمارهٔ ۴۱)، بنابراین برجمیع خطوط واقع در این صفحه و از جمله بر OK عمود می‌باشد.

۵۶ ـ عکس قضیهٔ سه عمود ـ صفحهٔ P و خط راست Δ را در آن و نقطهٔ O را خارج از آن در نظر می‌گیریم؛ اگر از نقطهٔ O عمود OH را بر صفحهٔ P و عمود OK را بر خط Δ فرود آوریم، خط راست HK که پای این دو عمود را به هم وصل می‌کند بر Δ عمود است (شکل ۴۸).

چون خط OH بر صفحهٔ P عمود است، بر خط Δ نیز که در صفحهٔ P قرار دارد عمود می‌باشد؛ پس خط Δ از یك طرف بر OH و از طرف دیگر بر OK (بنا بفرض) عمود است بنابر این Δ بر صفحهٔ OHK عمود می‌باشد؛ در نتیجه خط Δ بر خط HK که در صفحهٔ OHK واقع است نیز عمود می‌باشد.

عمود و مایل

۵۷ ـ خطی که صفحه‌ای را قطع کند ولی بر آن عمود نباشد نسبت به‌آن صفحه **مایل** و نقطهٔ تقاطع آن با صفحه، **پای مایل** نامیده می‌شود. از نقطهٔ O واقع در خارج صفحهٔ P فقط یك عمود OH بر صفحهٔ P می‌توان فرود آورد؛ ولی هر خط راست مثل OA که از نقطهٔ O و یکی از نقاط صفحهٔ P غیر از H بگذرد، نسبت به صفحهٔ P مایل است (شکل ۴۹).

۵۸ ـ قضیه ـ هرگاه از نقطه‌ای واقع در خارج یك صفحه یك عمود و چند مایل نسبت به آن صفحه رسم کنیم*:

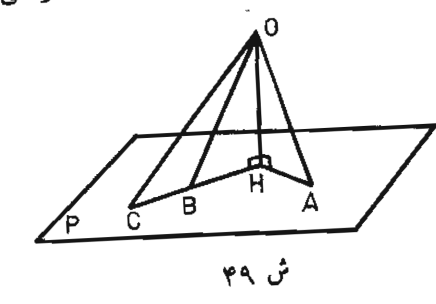
* در این قضیه مقصود از عمود و مایل قطعه خطهایی است که یك سرشان نقطهٔ مفروض و سر دیگرشان پای خط عمود یا پای خط مایلی است که از نقطهٔ مفروض بر صفحه رسم می‌شوند.

اولاً عمود از هر یك از مایلها کوتاهتر است .

ثانیاً دو مایل که پایهایشان از پای عمود به یك فاصله است ، متساویند .

ثالثاً از دو مایل که پایهایشان از پای عمود به یك فاصله نیست آن‌که پایش از پای عمود دورتر است درازتر می‌باشد .

از نقطهٔ O واقع در خارج صفحهٔ P عمود OH و مایل OA را نسبت به صفحهٔ P رسم می‌کنیم (شکل۴۹) .



ش ۴۹

اولاً در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHA ضلع OH از وتر OA کوچکتر است .

$$OH<OA$$

ثانیاً اگر نقطهٔ B در صفحهٔ P واقع و HB با HA مساوی باشد مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OHA و OHB در حالت دو ضلع و زاویهٔ بین آنها متساویند ، پس :

$$OA=OB$$

ثالثاً اگر نقطهٔ C در صفحهٔ P واقع و HC از HA بزرگتر باشد ، نقطهٔ B را روی قطعه خط HC طوری اختیار می‌کنیم که HB با HA مساوی باشد ، نظر به قسمت دوم داریم $OB=OA$ ؛ اما در صفحهٔ OHC مایل OC که پایش از پای مایل OB نسبت به‌پای عمود

OH دورتر است ، از OB بزرگتر می‌باشد ، پس :

$$OC>OA$$

۵۹ ـ عکس قضیهٔ ۵۸ ـ از نقطه‌ای واقع در خارج یك صفحه عمودی بر آن صفحه فرود می‌آوریم ونقطهٔ مزبور را به‌نقاط مختلف صفحه وصل می‌کنیم .

اولاً اگر دو مایل متساوی باشند پاهای آنها از پای عمود به‌یك فاصله‌اند .

ثانیاً اگر دو مایل متساوی نباشند ، آن که بزرگتر است پایش از پای عمود دورتر است .

در شکل ۴۹ ، **اولاً** اگر OA با OB مساوی باشد ناچار داریم: $HA=HB$ زیرا اگر داشته باشیم $HA\neq HB$ نظر به قسمت سوم قضیهٔ ۵۸ ، OA و OB با هم مساوی نخواهند بود و این خلاف فرض است .

ثانیاً اگر OC از OA بزرگتر باشد ناچار داریم $HC>HA$ زیرا اگر داشته باشیم $HC<HA$ نظر به قضیهٔ قبل خواهیم داشت : $OC<OA$ و این خلاف فرض است .

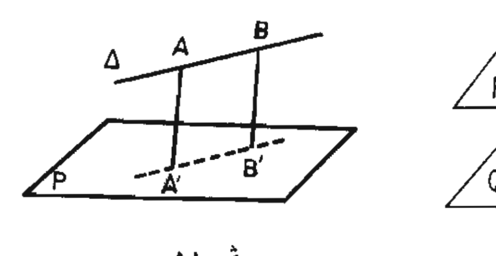
۶۰ ـ فاصلهٔ یك نقطه از یك صفحه ـ طول قطعه‌ای از خط عمودی را که از یك نقطه به یك صفحه فرود آید و بین آن نقطه و آن صفحه محصور باشد ، فاصلهٔ آن نقطه از آن صفحه می‌نامند .

درشکل ۴۹ فاصلهٔ نقطهٔ O ازصفحهٔ P عبارت است از طول قطعه‌خط عمود OH ؛ این قطعه‌خط کوتاهترین قطعه خطی است‌که نقطهٔ O را به یکی از نقاط صفحهٔ P وصل می‌کنند .

۶۱ـ فاصلهٔ دو صفحهٔ متوازی ـ دو صفحهٔ متوازی P و Q را در نظر می‌گیریم و از نقاط A و B واقع در صفحهٔ P عمودهای AA' و BB' را بر صفحهٔ Q فرود می‌آوریم (شکل ۵۰) ؛ قطعه‌خطهای متوازی AA' و BB' که بین دو صفحهٔ متوازی محصورند متساوی می‌باشند (شمارهٔ ۳۵) ، پس :

اگر دو صفحه با هم موازی باشند ، جمیع نقاط هر يك از آنها از صفحهٔ دیگر به يك فاصله‌اند .

تعریف ـ فاصلهٔ مشترك نقاط هر يك از دو صفحهٔ متوازی را از صفحهٔ دیگر فاصلهٔ آن دو صفحه می‌نامند .



ش ۵۱ ش ۵۰

۶۲ـ فاصلهٔ يك خط راست و يك صفحهٔ متوازی ـ خط Δ را که با صفحهٔ P موازی است در نظر می‌گیریم و از نقاط A و B واقع بر خط Δ عمودهای AA' و BB' را بر صفحهٔ P فرود می‌آوریم (شکل ۵۱) ؛ قطعه خطهای AA' و BB' متساویند (شمارهٔ ۳۶) ، پس :

اگر يك خط راست و يك صفحه متوازی باشند جمیع نقاط آن خط از آن صفحه به يك فاصله‌اند . این فاصله را فاصلهٔ خط مزبور از آن صفحه می‌نامند .

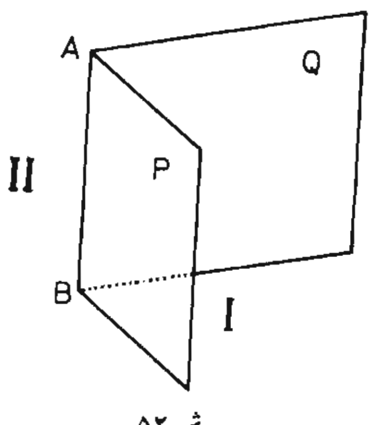
۴ ـ فرجه (زاویهٔ دو وجهی)

۶۳ ـ تعریف ـ زاویهٔ دو وجهی یا فرجه ، شکلی است که به دو نیم صفحه که دارای مرز مشترك باشند محدود شده باشد .

خط راست مشترك مزبور را **یال** فرجه و هر يك از دو نیم صفحه را **وجه** فرجه می‌نامند .

اگر نقطه‌ای متعلق به يك فرجه باشد ، ولی روی هیچیك از دو وجه آن واقع نباشد ، می‌گویند که آن نقطه داخل فرجهٔ مزبور واقع است .

دو نیم صفحهٔ P و Q که به خط راست AB محدود شده باشند ، دو فرجه پدید می‌آورند (شکل ۵۲) ، یکی فرجهٔ I و یکی فرجهٔ II که AB یال مشترك آنها و نیم‌صفحه‌های P و Q وجوه مشترك آنها می‌باشند .



ش ۵۲

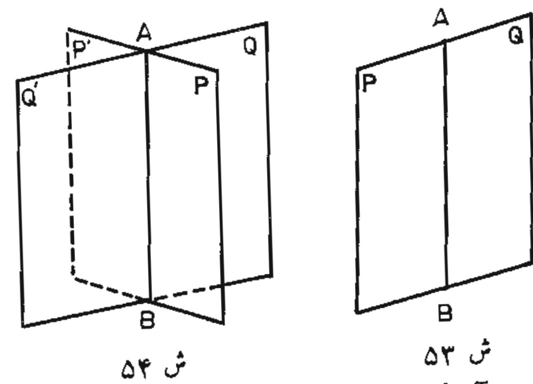
اگر یکی از دو وجه فرجهٔ I را امتداد دهیم ، تمام فرجهٔ I در يك طرف صفحهٔ حاصل واقع می‌شود ؛ چنین فرجه را **فرجهٔ محدب** می‌گویند . بعکس اگر یکی ازدو وجه فرجهٔ II را امتداد دهیم صفحه‌ای حاصل می‌شود که يك قسمت ازفرجهٔ II در يك‌طرف و قسمتی دیگر از فرجهٔ II در طرف دیگر آن صفحه قرار می‌گیرد ؛

این قبیل فرجه‌ها (مانند فرجهٔ II) **فرجهٔ مقعر** نامیده می‌شوند .

بعد از این هر جا مطلقاً کلمهٔ فرجه را ذکر کنیم ، مقصود همان فرجهٔ محدب خواهد بود ؛ و در صورتی که مقصود فرجهٔ مقعر باشد بصراحت تذکر خواهیم داد . فرجه‌ای را که دو وجه آن نیم صفحه‌های P و Q و یال آن خط AB یا خط D است با علامت قراردادی (P ، AB ، Q) یا (P ، D ، Q) نشان می‌دهند ، و در صورتی که با فرجهٔ دیگر اشتباه نشود آن را فقط با علامت (P ، Q) و یا به اسم یال آن AB می‌نمایانند .

درصورتی که دو وجه فرجه‌ای در امتداد یکدیگر (یعنی در یك صفحه) و در دو طرف یال فرجه قرار داشته باشند ، آن را **فرجهٔ مسطح** یا **فرجهٔ نیم‌فضا** می‌نامند (شکل۵۳) .

دو فرجه را **متقابل به یال** یا **روبرو** می‌نامند هرگاه هریك از



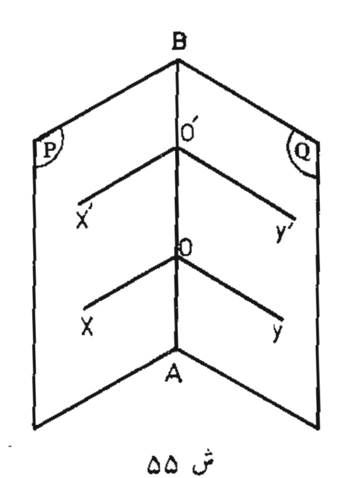
ش ۵۴   ش ۵۳

دو وجه یکی از آنها در امتداد یك وجه دیگری باشد ، مثل دو فرجهٔ (P ، AB ، Q) و (P' ، AB ، Q') در شکل ۵۴ .

۶۴ـ زاویهٔ مسطحهٔ یك فرجه ـ اگر از نقطه‌ای مانند O واقع روی یال AB از فرجهٔ (P ، AB ، Q) صفحه‌ای بر یال AB عمود

کنیم ، این صفحه وجوه فرجه را در دو نیم‌خط Ox و Oy قطع می‌کند؛ زاویهٔ محدب xOy را زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ محدب مزبور در نقطهٔ O می‌نامند .

گاهی به‌جای آنکه بگویند : زاویهٔ مسطحهٔ فرجه ، مختصراً می‌گویند مسطحهٔ فرجه . اضلاع Ox و Oy زاویهٔ مسطحهٔ xOy بترتیب در صفحات P و Q بر یال AB عمود هستند (شکل ۵۵) .



ش ۵۵

اگر $\widehat{xOy}$ و $\widehat{x'O'y'}$ مسطحه‌های فرجهٔ AB در نقاط O و O' باشند ، نیم‌خطهای Ox و O'x' با هم و نیم‌خطهای Oy و O'y' با هم موازی و ممتد در یك جهت هستند ، زیرا مثلا Ox و O'x' هر دو در نیم‌صفحهٔ PAB در یك طرف خط AB واقع هستند و بر AB عمود می‌باشند ؛ پس زوایای xOy و x'O'y' متساویند ، یعنی **جمیع مسطحه‌های یك فرجه با هم مساویند** ؛ به عبارت دیگر ، اندازهٔ مسطحهٔ فرجه بستگی به موضع رأس آن روی یال فرجه ندارد ؛ به این مناسبت هر یك از زوایای متساوی xOy و x'O'y' را می‌توان مطلقاً مسطحهٔ فرجهٔ AB نامید .

۶۵ ـ تبصره ـ اگر وضع یکی از زوایای مسطحهٔ یك فرجه ، مثلا زاویهٔ xOy ، در فضا معین باشد ، آن فرجه مشخص است ؛ زیرا یال آن عمودی است که از نقطهٔ O بر صفحهٔ xOy اخراج شود و دو

وجه آن وسیلهٔ این یال و دو نیم‌خط Ox و Oy مشخص می‌شوند .

۶۶ ـ قضیه ـ شرط لازم و کافی برای آنکه دو فرجه متساوی* باشند این است که زوایای مسطحهٔ آنها با هم مساوی باشند .

اولا اگر دو فرجه متساوی باشند ، می‌توان آنها را بر هم منطبق کرد و در این صورت مسطحه‌های دو فرجه در هر یك از نقاط یال آنها برهم منطبق می‌شوند ؛ پس مسطحه‌های دو فرجه متساویند .

ثانیاً اگر زوایای مسطحهٔ دو فرجه در دو نقطهٔ اختیاری واقع بر یال آنها با هم مساوی باشند می‌توان این دومسطحه را برهم منطبق کرد و در این صورت دو فرجه بر هم منطبق می‌شوند .

۶۷ ـ نتیجه ـ دو فرجهٔ روبرو متساویند .

زیرا زوایای مسطحهٔ آنها که در یکی از نقاط یال مشترکشان رسم شوند دو زاویهٔ متقابل به رأس خواهند بود و بنابراین متساویند .

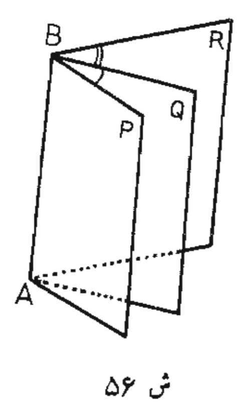
۶۸ ـ فرجه‌های مجاور ـ مجموع دو فرجه ـ دو فرجه را مجاور یکدیگر گویند اگر یالشان مشترك و یکی از دو وجه آنها نیز مشترك باشد و دو فرجه در دو طرف این وجه مشترك واقع باشند .

دو وجه غیر مشترك را **وجوه خارجی** دو فرجهٔ مجاور یکدیگر می‌نامند .

* طبق تعریف کلی : دو شکل هندسی را در صورتی متساوی می‌گویند که بتوان آنها را بر هم منطبق کرد بطوری که هر نقطه که متعلق به هر یك از آن دو شکل باشد روی دیگری قرار گیرد . چون شکلهای هندسی را مستقل از ماده در نظر می‌گیریم ، می‌توان فرض کرد که **انطباق دو شکل فضایی (با تحقق شرایطی که برای تساوی آنها لازم است) امکان پذیر است .**

در شکل ۵۶ ، فرجه‌های (P ، Q) و (Q ، R) مجاور یکدیگرند .

مجموع دو فرجهٔ مجاور به هم فرجه‌ای است که از دووجه خارجی آن دو فرجه تشکیل می‌شود ؛ مثلاً در شکل ۵۶ فرجهٔ PABR مجموع دو فرجهٔ PABQ و QABR می‌باشد .



ش ۵۶

فرجه‌های (P ، Q) و (Q ، R) را محدب فرض کرده‌ایم ولی مجموع آنها یعنی فرجهٔ (P ، R) ممکن است محدب یا مقعر باشد .

برای جمع‌کردن دو فرجهٔ اختیاری باید آنها را مجاور یکدیگر قرار داد .

۶۹ـ همچنانکه در هندسهٔ مسطحه در مورد زوایا دیده‌ایم : در شکل ۵۶ ، فرجهٔ (Q ، R) را **تفاضل** فرجه‌های (P ، R) و (P ، Q) می‌نامند ومی‌گویند فرجهٔ (P ، R) از هر یك از فرجه‌های (P ، Q) و (Q ، R) **بزرگتر** است . برای **جمع‌کردن چند فرجه** ، ابتدا دوتا از آنها را با هم جمع می‌کنند و به مجموع آنها فرجهٔ سوم را می‌افزایند و عمل را ادامه می‌دهند . مجموع چند فرجه بترتیبی که آنها را یکی پس از دیگری با هم جمع می‌کنیم بستگی ندارد .

تمرین ـ حاصل ضرب یك فرجه را در یك عدد صحیح یا یك کسر

و همچنین نسبت دو فرجه را همچنانکه در هندسهٔ مسطحه در مورد زوایا دیده‌ایم تعریف کنید .

۷۰- چون تساوی و جمع را در مورد فرجه‌ها تعریف کردیم ، فرجه کمیتی است اندازه پذیر . به‌کمك قضیهٔ زیر می‌توان اندازه‌گیری فرجه‌ها را به وسیلهٔ اندازه‌گیری زوایای مسطحهٔ آنها انجام داد .

قضیه ـ نسبت یك فرجه به فرجهٔ دیگر مساوی است بانسبت مسطحهٔ فرجهٔ اول به مسطحهٔ فرجهٔ دوم .

دو فرجهٔ AB و $A'B'$ را در نظر می‌گیریم و زاویهٔ مسطحهٔ اولی را در یکی از نقاط یال آن ، xOy و زاویهٔ مسطحهٔ دومی را در یکی از نقاط یال آن، $x'O'y'$ می‌نامیم (شکل ۵۷) و فرض

ش ۵۷

می‌کنیم‌که زوایای xOy و $x'O'y'$ یك عاد مشترك داشته باشند ، یعنی مثلا $\frac{۱}{۴}$ زاویهٔ xOy با $\frac{۱}{۳}$ زاویهٔ $x'O'y'$ مساوی باشد، دراین صورت داریم: $\frac{\widehat{xOy}}{\widehat{x'O'y'}}=\frac{۴}{۳}$ و اگر زاویهٔ xOy را به چهار قسمت متساوی و زاویهٔ $x'O'y'$ را به‌سه قسمت متساوی تقسیم‌کنیم ، هفت زاویهٔ حاصل

همه باهم مساویند وفرجه‌هایی‌که این هفت زاویه ، زوایای مسطحهٔ آنها می‌باشند نیز با هم مساوی هستند و واضح است که فرجهٔ AB چهار برابر یکی از این فرجه‌ها و فرجهٔ $A'B'$ سه برابر یکی از آنهاست یعنی نسبت فرجهٔ AB به فرجهٔ $A'B'$ مساوی است با $\frac{۴}{۳}$، یعنی :

$$\frac{\text{فرجهٔ } AB}{\text{فرجهٔ } A'B'}=\frac{\text{زاویهٔ } xOy}{\text{زاویهٔ } x'O'y'}=\frac{۴}{۳} \qquad (۱)$$

۷۱ ـ نتیجه ـ اگر برای اندازه‌گیری فرجه‌ها فرجه‌ای را واحد اختیار کنیم که زاویهٔ مسطحهٔ آن مساوی با واحد زاویه باشد ، اندازهٔ هر فرجه و اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ همان فرجه دوعدد متساوی خواهند بود .

زیرا اگر در تساوی ۱ شمارهٔ ۷۰ ، زاویهٔ $x'O'y'$ مساوی با واحد زاویه باشد و فرجهٔ $A'B'$ را واحد فرجه اختیار کنیم ، تساوی مزبور به صورت زیر در می‌آید :

$$\text{اندازهٔ فرجهٔ } AB = \text{اندازهٔ زاویهٔ } xOy = \frac{۴}{۳}$$

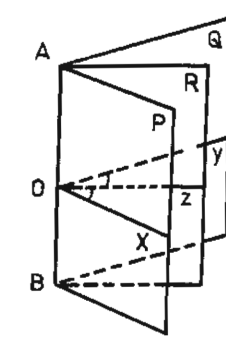
قرارداد ـ نظر به استدلال فوق اگر واحد زاویه درجه باشد ، واحد فرجه را فرجه‌ای اختیار می‌کنیم که مسطحهٔ آن زاویهٔ یك درجه باشد و آن را فرجهٔ یك درجه‌ای می‌نامیم و اگر واحد زاویه گراد باشد ، واحد فرجه را فرجه‌ای اختیار می‌کنیم که مسطحهٔ آن یك‌گراد باشد و آن را فرجهٔ یك گرادی می‌گوییم .

۷۲ ـ تعریف ـ فرجهٔ قائمه فرجه‌ای است که زاویهٔ مسطحهٔ آن قائمه باشد .

در شمارهٔ ۶۳ ، تعریف فرجهٔ نیم‌فضا را دیدیم (شکل ۵۳) ؛ زاویهٔ مسطحهٔ یك فرجهٔ نیم‌فضا عبارت است از یك زاویهٔ نیم‌صفحه یعنی دوقائمه ؛ پس فرجهٔ نیم‌فضا دوبرابرفرجهٔ قائمه است و به عبارت دیگر، **فرجهٔ قائمه نصف یك فرجهٔ نیم‌فضاست .**

۷۳ ـ نیمساز فرجه ـ نیمساز فرجه نیم صفحه‌ای است که به یال فرجه محدود باشد و فرجه را به دو فرجهٔ متساوی تقسیم‌کند .

اگر زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ $(P ، AB ، Q)$ را در یکی از نقاط یال آن xOy بنامیم وزاویهٔ xOy را به وسیلهٔ نیم‌خط Oz نصف کنیم (شکل ۵۸) ، نیمساز فرجهٔ $(P ، Q)$ عبارت است از نیم‌صفحهٔ R که به خط AB محدود و شامل نیم‌خط Oz می‌باشد ؛ زیرا زوایای متساوی xOz و zOy مسطحه‌های دو فرجهٔ $(P ، R)$ و $(R ، Q)$ می‌باشند و لذا این دو فرجه متساویند .

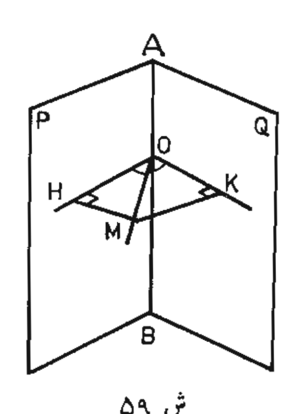


ش ۵۸

۷۴ ـ قضیه ـ نیمساز هر فرجهٔ محدب ، مکان هندسی نقاطی است که در داخل فرجهٔ مزبور واقع و از دو وجه آن به یك فاصله باشند .

فرجهٔ $(P ، AB ، Q)$ و نقطهٔ دلخواهی مانند M را داخل آن در نظر می‌گیریم و از نقطهٔ M عمودهای MH و MK را بترتیب بر دو صفحهٔ P و Q فرود می‌آوریم ؛ این دو عمود بر فصل مشترك دو صفحهٔ P و Q یعنی خط AB عمودند ، بنابراین یال AB بر صفحهٔ

HMK عمود می‌باشد ؛ اگر فصل مشترك صفحهٔ HMK را با خط AB نقطهٔ O بنامیم ، زاویهٔ محدب HOK زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ محدب $(P ، Q)$ می‌باشد و MH و MK عبارتند ازفواصل نقطهٔ M از دوضلع زاویهٔ HOK؛ برای آنکه MH و MK متساوی باشند ، لازم و کافی است که نقطهٔ M روی نیمساز زاویهٔ محدب HOK و بنا براین روی نیمساز فرجهٔ محدب $(P ، Q)$ واقع باشد .



ش ۵۹

۷۵ ـ تذکر ـ اغلب تعاریف و قضایایی را که در مورد زوایا در هندسهٔ مسطحه دیده‌ایم می‌توان دربارهٔ فرجه‌ها تعمیم داد و در این مورد به ذکر برخی از آنها اکتفا می‌کنیم :

یك فرجهٔ محدب را بر حسب آنکه زاویهٔ مسطحه‌اش حاده یا منفرجه باشد فرجهٔ حاده یا فرجهٔ منفرجه می‌نامند .

دو فرجه را متمم یکدیگر گویند ، هرگاه مجموع آنها یك فرجهٔ قائمه باشد . دو فرجه را مکمل یکدیگر نامند ، هرگاه مجموع آنها یك فرجهٔ نیم‌فضا باشد .

نیمسازهای دو فرجه که مجاور و مکمل یکدیگر باشند ، یك فرجهٔ قائمه پدید می‌آورند .

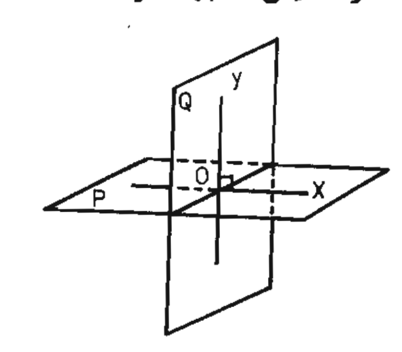
نیمسازهای دوفرجهٔ متقابل به یال ، دو نیم‌صفحهٔ متقابل هستند ، یعنی با هم یك صفحه تشکیل می‌دهند .

اگر دو صفحهٔ متوازی را صفحهٔ ثالثی قطع کنند ، هر دو فرجهٔ متبادل داخلی یا هردوفرجهٔ متقابل داخلی وخارجی باهم مساوی خواهند بود و غیره . . .

۵ ـ صفحات عمود بر یکدیگر

۷۶ ـ تعریف ـ دو صفحهٔ متقاطع را عمود بر یکدیگر گویند ، هرگاه یکی از چهار فرجه‌ای که از تقاطع آنها پدید می‌آید قائمه باشد .

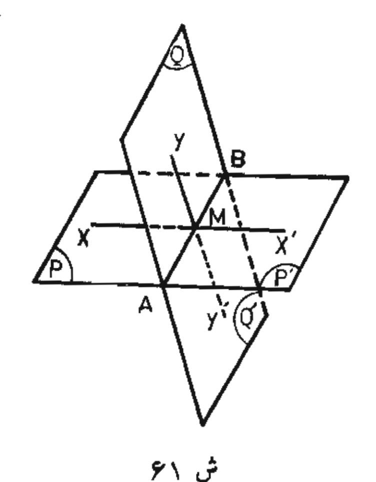
چون فرجهٔ قائمه نصف فرجهٔ نیم فضاست (شمارهٔ ۷۲) ، اگر یکی از چهار فرجه‌ای که از تقاطع دو صفحهٔ P و Q پدید می‌آید (شکل ۶۰) قائمه باشد ، هرچهارفرجهٔ مزبورقائمه خواهند بود ، یعنی :



ش ۶۰

دو صفحهٔ عمود بر یکدیگر چهار فرجهٔ قائمه پدید می‌آورند .

۷۷ ـ زاویهٔ دو صفحه ـ دو صفحهٔ متقاطع P و Q چهار فرجه پدید می‌آورند که دو بدو متساوی یا مکمل یکدیگر می‌باشند (شکل ۶۱) . هر یك از این چهار فرجه را زاویهٔ دو صفحهٔ P و Q می‌نامند .



ش ۶۱

دیدیم که اگر یکی از این چهار فرجه قائمه باشد ، سه فرجهٔ دیگر نیز قائمه خواهند بود ؛ در موردی که هیچیك از این فرجه‌ها قائمه نباشند ، و بطور مطلق از زاویهٔ دو صفحه گفتگو شود ، مقصود زاویهٔ حادهٔ آنهاست .

۷۸ ـ قضیه ـ اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد هر صفحه که بر این خط بگذرد برصفحهٔ اول عمود است .

فرض می‌کنیم که خط AH در نقطهٔ H برصفحهٔ P عمود باشد . صفحهٔ R را از خط AH می‌گذرانیم و فصل مشترك صفحات P و R را خط xy می‌نامیم ؛ واضح است که xy از نقطهٔ H می‌گذرد .

حال از نقطهٔ H در صفحهٔ P ، عمود Ht را بر xy اخراج می‌کنیم ؛ خط AH که بر صفحهٔ P عمود است بر خطوط Ht و xy که در این صفحه واقعند نیز عمود می‌باشد ؛ زاویهٔ AHt زاویهٔ مسطحهٔ یکی از فرجه‌هایی است که از تقاطع صفحات P و R پدید می‌آید ؛ چون این زاویه قائمه است صفحهٔ R بر صفحهٔ P عمود می‌باشد .

ش ۶۲

۷۹ ـ قضیه ـ اگر دو صفحه بریکدیگر عمود باشند و از نقطه‌ای که در یکی از این دو صفحه واقع باشد خط عمودی بر فصل مشترك آنها فرود آوریم این خط برصفحهٔ دیگر نیز عمود است .

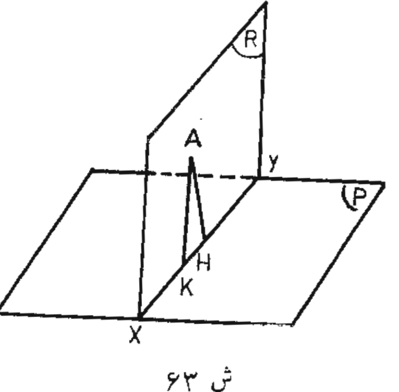
فرض می‌کنیم که صفحات P و R بر هم عمود باشند ؛ از نقطهٔ A واقع در صفحهٔ R عمود AH را در این صفحه بر فصل مشترك دو صفحهٔ مزبور فرود می‌آوریم (شکل ۶۲) ؛ اگر از نقطهٔ H عمود Ht را در صفحهٔ P بر خط xy اخراج کنیم زاویهٔ AHt زاویهٔ مسطحهٔ یکی از فرجه‌های صفحات P و R است و چون صفحات P و R بر هم عمود می‌باشند این زاویه قائمه است ، بنابراین خط AH از یك طرف بر xy واز طرف دیگر بر Ht عمود است ، پس برصفحهٔ P عمود است .

۸۰ ـ می‌توان قضایای شمارهٔ ۷۸ و ۷۹ را یکجا به عبارت زیر بیان کرد :

شرط لازم و کافی برای آنکه دو صفحه بر یکدیگر عمود باشند این است که یکی ازآنها شامل یك خط عمود بردیگری باشد (یا یکی از آنها عمود بر یك خط از دیگری باشد) .

۸۱ ـ قضیه * ـ اگر دو صفحه بر یکدیگر عمود باشند و از نقطه‌ای که دریکی از دوصفحه واقع باشد خط عمودی بر صفحهٔ دیگر رسم کنیم ، این عمود در صفحهٔ اول واقع است .

فرض می‌کنیم که دو صفحهٔ P و R بر هم عمود باشند ؛ نقطهٔ A را در صفحهٔ R اختیار می‌کنیم و از آن عمود AH را بر صفحهٔ P فرود می‌آوردیم؛ باید ثابت‌کنیم که AH درصفحهٔ R واقع است . اگر در صفحهٔ R از نقطهٔ A عمود AK را بر فصل مشترك دو صفحه فرود آوریم نظر به شمارهٔ



ش ۶۳

* قضایای شمارهٔ ۷۹ و ۸۱ عکس قضیهٔ شمارهٔ ۷۸ هستند

۷۹ خط AK برصفحهٔ P عمود است وچون از نقطهٔ A یك خط بیشتر نمی‌توان بر صفحهٔ P عمود فرود آورد ، AH بر AK منطبق است ؛ یعنی عمود AH در صفحهٔ R واقع می‌باشد .

۸۲ ـ تبصره ـ اگر دو صفحه بر یکدیگر عمود باشند و از نقطه‌ای واقع در خارج این دو صفحه خطی بریکی از آنها عمودکنیم ، این خط با صفحهٔ دیگر موازی است .

دو صفحهٔ عمود بر هم P و Q را در نظر می‌گیریم (شکل ۶۴) واز نقطهٔ A که درخارج هردوصفحه واقع است ، خط D را برصفحهٔ Q عمود می‌کنیم ؛ باید ثابت کنیم که خط D با صفحهٔ P موازی است .

اگر در صفحهٔ P خط Δ را عمود بر فصل مشترك دو صفحهٔ P و Q رسم کنیم ، این خط بر صفحهٔ Q عمود است (شمارهٔ۷۹) وبنابراین، با خط D موازی‌است (شمارهٔ۵۴)؛ وچون خط D با یکی از خطوط صفحهٔ P موازی است ، با آن صفحه موازی می‌باشد .

ش ۶۴

۸۳ ـ قضیه ـ اگر دو صفحهٔ متقاطع بر یك صفحه عمود باشند ، فصل مشترك آنها بر آن صفحه عمود است .

فرض می‌کنیم که دو صفحهٔ P و Q برصفحهٔ R عمود باشند ؛ نقطهٔ A راروی‌فصل‌مشترك‌صفحات P و Q اختیارمی‌کنیم(شکل۶۵)؛

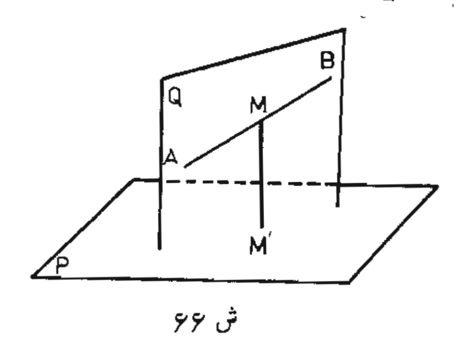
ش ۶۵

نظر به شمارهٔ ۸۱ ، عمود AO که از نقطهٔ A بر صفحهٔ R فرود آید ، در صفحات P و Q واقع است ؛ بنابراین ، AO برفصل مشترك دوصفحهٔ مزبور منطبق می‌باشد .

قضیهٔ فوق را می‌توان به این صورت نیز بیان‌کرد :

اگر یك صفحه بردوصفحهٔ متقاطع عمود باشد ، بر فصل مشترك آنها عمود است .

۸۴ ـ قضیه ـ از خطی مانند AB که بر صفحه‌ای مثل P عمود نباشد ، می‌توان یك صفحه‌گذراند که بر P عمود باشد و بیش از یکی نمی‌توان .



ش ۶۶

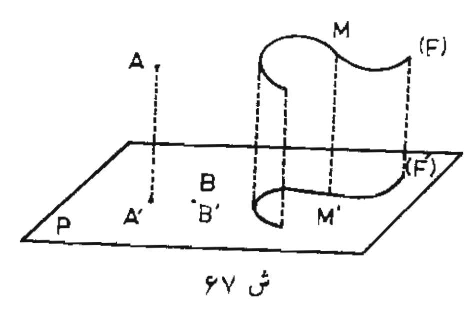
اگر از نقطهٔ M واقع بر خط AB خط MM' را بر صفحهٔ P عمود کنیم (شکل ۶۶) ، صفحهٔ Q که از دوخط متقاطع AB و MM' می‌گذرد ، برصفحهٔ P عموداست (شمارهٔ۷۸)؛ پس: **یك صفحه می‌توان عمودکرد** . هر صفحهٔ دیگر که از AB بگذرد و بر صفحهٔ P عمود باشد ، شامل خط MM' خواهد بود (شمارهٔ۸۱) و بر صفحهٔ Q منطبق خواهد شد ؛ پس : **بیش از یك صفحه نمی‌توان عمود کرد .**

تمرین ۱ ـ ثابت کنید که اگر خط D با صفحهٔ P موازی باشد ، هر صفحه که بر خط D عمود باشد ، بر صفحهٔ P نیز عمود است .

تمرین ۲ ـ ثابت کنید که اگر دو صفحه متوازی باشند ، هر صفحه که بر یکی از آنها عمود باشد ، بر دیگری نیز عمود است .

۶ ـ تصویرقائم بر یك صفحه

۸۵ ـ تعریف ـ صفحهٔ P ونقطه‌ای مانند A را در نظرمی‌گیریم و از نقطهٔ A عمود AA' را بر صفحهٔ P فرود می‌آوریم (شکل ۶۷) ؛ پای این‌عمود یعنی نقطهٔ A' را **تصویر قائم** یا بطور خلاصه **تصویر**



ش ۶۷

نقطهٔ A بر صفحهٔ P (یا روی صفحهٔ P) می‌نامند. در این مقام،صفحهٔ P را **صفحهٔ تصویر** و عمود AA' را **مصور نقطهٔ A** می‌گویند .

تصویرقائم* هر نقطه بر یك صفحه عبارت است از پای عمودی که از آن نقطه بر آن صفحه فرود آید .

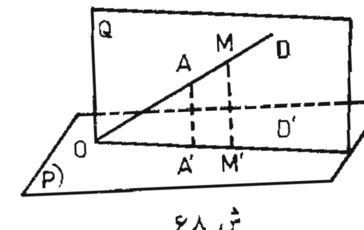
اگر نقطه‌ای مانند A خارج از صفحهٔ تصویر واقع باشد ، تصویر آن نقطه ، نقطهٔ دیگری است مانند A' که در صفحهٔ P واقع است ؛ ولی اگر نقطه‌ای مانند B در صفحهٔ تصویر واقع باشد ، تصویرش بر

* درشکل ۶۷ ، اگر مصور نقطهٔ A یعنی خط AA' برصفحهٔ تصویر عمودنباشد بلکه به موازات خط معلومی باشد، دراین صورت تصویر را **مایل** می‌گویند ؛ به این مناسبت است که گاهی قائم بودن تصویر را خاطرنشان می‌کنند . در این کتاب ، ما فقط تصویر قائم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم .

خودش منطبق است (شکل ۶۷) . اگر تصویر نقطه‌ای بر یك صفحه در دست باشد ، نمی‌توان وضع آن نقطه را درفضا مشخص کرد ؛ زیرا مثلا در شکل ۶۷ ، نقطهٔ 'A تصویرجمیع نقاطی است‌که برخط 'AA واقع هستند . از مجموعهٔ تصاویر نقاط مختلف شکل F بر صفحهٔ P شکل مسطحی مانند 'F پدید می‌آید که آن را **تصویر شکل F بر صفحهٔ P** می‌نامند .

۸۶ ـ قضیه ـ تصویر هر خط راست بر صفحه‌ای که بر آن خط عمود نباشد ، یك خط راست است .

صفحهٔ P و خط راست D راکه بر صفحهٔ P عمود نیست ، در نظر می‌گیریم و نقطهٔ A را روی خط D اختیار می‌کنیم و تصویر A را بر صفحهٔ P نقطهٔ 'A می‌نامیم(شکل ۶۸) ؛ از دو خط متقاطع D و 'AA صفحه‌ای می‌گذردکه آن‌را Q می‌نامیم ؛ صفحهٔ Q بر P عمود است (شمارهٔ ۷۸) وفصل مشترك آن با صفحهٔ P خطی است که از نقطهٔ 'A می‌گذرد ؛ این خط را 'D می‌نامیم ؛ خط 'D تصویر خط D بر صفحهٔ P است ؛ زیرا مصور هر نقطه مانند M از خط D در صفحهٔ Q واقع است (شمارهٔ ۸۱) و بنابراین ، تصویر M یعنی نقطهٔ 'M روی خط 'D واقع می‌باشد .

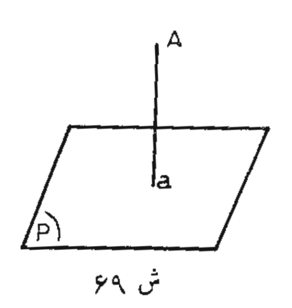


ش ۶۸

اگر تصویر خطی بر یك صفحه در دست باشد ، نمی‌توان وضع آن خط را در فضا مشخص کرد .

اگر خط راست A در نقطه‌ای مانند a بر صفحهٔ P عمود باشد

(شکل ۶۹) ، تصاویر جمیع نقاط خط A روی صفحهٔ P بر نقطهٔ a منطبق خواهند شد و در این حالت خاص ، تصویر خط راست A بر صفحهٔ P ، یك نقطه است .



ش ۶۹

در شکل ۶۸ ، صفحهٔ Q را **صفحهٔ مصور خط D بر صفحهٔ P** می‌گویند . هر خط راست دیگر که در صفحهٔ Q واقع باشد ، تصویرش روی صفحهٔ P بر خط 'D منطبق است .

به عبارت دیگر ، **اگر صفحه‌ای مانند Q بر صفحهٔ تصویر عمود باشد ، تصاویر جمیع نقاط وخطوطی‌که در صفحهٔ Q واقع باشند ، بر فصل مشترك صفحهٔ Q و صفحهٔ تصویر واقع است .**

۸۷ ـ نتیجه ـ اولاً اگر خط راست AM بر صفحهٔ P عمود نباشد ، تصویر قطعه‌خط AM بر صفحهٔ P عبارت است از قطعه‌خط 'A'M که دو سرش تصاویر نقاط A و M می‌باشند (شکل ۶۸) .

ثانیاً اگر صفحهٔ زاویه‌ای بر صفحهٔ تصویر عمود نباشد ، تصویر آن زاویه نیز یك زاویه است. همچنین اگرصفحهٔ یك چندضلعی برصفحهٔ تصویر عمود نباشد ، تصویر آن نیز یك چندضلعی است .

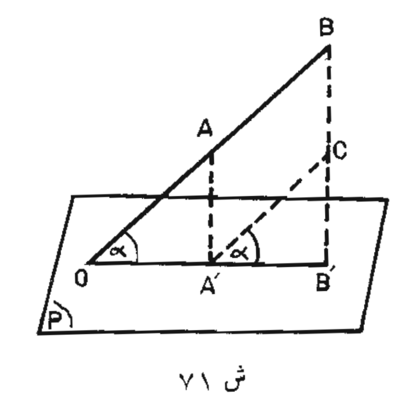
۸۸ ـ تبصرهٔ ۱ ـ اگرخط D صفحهٔ تصویر را در نقطه‌ای مانند O قطع کند (شکل۶۸) ، تصویر آن از نقطهٔ O می‌گذرد؛ واگرخطی مانند Δ باصفحهٔ تصویرموازی باشد(شکل۷۰)،

ش ۷۰

این خط با تصویرش موازی است و در این صورت هر قطعه‌خط مانند AB که روی خط Δ اختیار شود ، با تصویرش مساوی است :

$$AB=A'B'$$

۸۹- تبصرهٔ ۲- اندازهٔ تصویر هر قطعه‌خط بریك صفحه ، مساوی است با حاصل‌ضرب طول آن قطعه‌خط در کسینوس زاویهٔ حاده‌ای که محل قطعه‌خط مزبور با تصویر خود بر صفحه پدید می‌آورد .



ش ۷۱

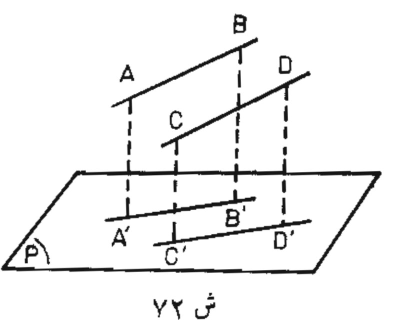
تصویر قطعه‌خط AB را بر صفحهٔ P قطعه‌خط A'B' و زاویهٔ خط AB را با تصویرش بر صفحهٔ P زاویهٔ α می‌نامیم(شکل۷۱) و از نقطهٔ A' در صفحهٔ ABB'A' خطی به‌موازات AB رسم می‌کنیم تا خط BB' را درنقطهٔ C قطع‌کند ؛ A'C با AB مساوی است و در مثلث قائم‌الزاویهٔ A'CB' داریم :

$$A'B'=A'C\times \cos\alpha=AB\times \cos\alpha$$

۹۰ ـ قضیه ـ اگر دو خط با یکدیگر موازی باشند ، تصاویر آنها روی یك صفحه یا باهم موازی یا برهم منطبق هستند (البته درصورتی که دو خط متوازی مزبور بر صفحهٔ تصویر عمود نباشند) .

دو خط متوازی AB و CD را که بر صفحهٔ تصویر P عمود نیستند ، در نظر می‌گیریم ؛ تصاویر نقاط A و C را A' و C' می‌نامیم

(شکل ۷۲) ؛ مصورهای AA' و CC' که هر دو بر صفحهٔ P عمود هستند ، باهم موازیند ؛ بنابراین اگردو صفحهٔ مصور ABB'A' و CDD'C' برهم منطبق نباشند ، با هم موازی هستند (شمارهٔ ۲۹) و فصل مشترکهای این دو صفحه با صفحهٔ P یعنی خطوط A'B' و C'D' با هم موازی می‌باشند (شمارهٔ ۳۱) .



ش ۷۲

اگر دو صفحهٔ مصور ABB'A' و CDD'C' بر هم منطبق باشند ، در این صورت خطوط متوازی AB و CD در یك صفحه که بر صفحهٔ تصویر عمود است واقعند و تصاویر آنها بر هم منطبق می‌باشند .

۹۱ ـ نتیجه ـ اولاً ـ تصویر هر متوازی‌الاضلاع روی صفحه‌ای‌که بر صفحهٔ آن عمود نباشد ، یك متوازی‌الاضلاع است .

ثانیاً ـ تصاویر دو قطعه‌خط متساوی و متوازی نیز دو قطعه‌خط متساوی و متوازی می‌باشند .

ثالثاً ـ اگر نقاط A و B و C روی یك خط راست و نقاط A' و B' و C' بترتیب تصاویر آنها بر یك صفحه باشند ، داریم : $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$ ؛ و بخصوص ، تصویر وسط هر قطعه خط ، بر وسط تصویر آن قطعه خط واقع است .

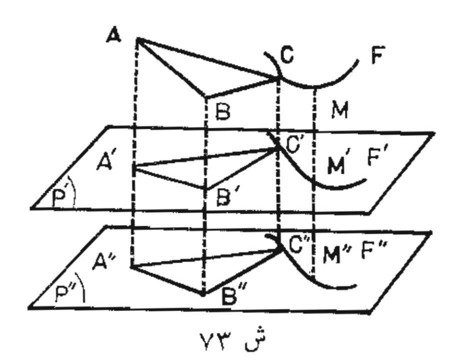
تمرین ـ AB و CD دو قطعه‌خط متوازی و A'B' و C'D' تصاویر آنها بر یك صفحه هستند ؛ ثابت کنید که $\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$.

تبصره ـ عکس قضیهٔ ۹۰ صحیح نیست ؛ یعنی ممکن است که تصاویر دو خط بر یك صفحه با هم موازی باشند ولی آن دو خط با هم موازی نباشند .

تمرین ـ ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه تصاویر دوخط متنافر بر یك صفحه با هم موازی باشند ، این است‌که صفحه‌ای‌که از یکی از آن دو خط بموازات دیگری بگذرد ، برصفحهٔ تصویر عمود باشد .

۹۲ ـ قضیه ـ تصاویر یك شکل روی دو صفحهٔ متوازی ، دوشکل متساوی هستند* .

شکل F و دو صفحهٔ متوازی P' و P'' را در نظر می‌گیریم و تصاویر F را برصفحات P' و P'' بترتیب F' و F'' می‌نامیم و روی شکل F سه نقطهٔ A و B و C راطوری اختیار می‌کنیم که اولا این سه نقطه روی یك خط راست نباشند و ثانیاً صفحهٔ مثلث ABC بر صفحات P' و P'' عمود نباشد و یك نقطهٔ دلخواه دیگر نیز مانند M روی شکل F در نظر



ش ۷۳

* چون درقسمتهای بعدی این کتاب ، از این قضیه فقط در حالتی که شکل مورد بحث یك مثلث باشد استفاده خواهیم کرد ، می‌توان به جای این قضیه به این حکم اکتفا کرد : **تصاویر هر مثلث مانند ABC روی دو صفحهٔ متوازی** (که با صفحهٔ ABC موازی نباشند) **دو مثلث متساوی می‌باشند** . درواقع روی شکل۷۳، دومثلث $A'B'C'$ و $A''B''C''$ درحالت سه ضلع متساویند .

می‌گیریم و تصاویر نقاط A ، B ، C و M را بر صفحات P' و P'' بترتیب A' ، B' ، C' و M' و A'' ، B'' ، C'' ، M'' می‌نامیم .

دو مثلث $A'B'C'$ و $A''B''C''$ (در حالت سه ضلع) با هم مساویند و می‌توانیم صفحهٔ P'' را طوری بر صفحهٔ P' منطبق کنیم که نقاط A'' ، B'' و C'' بترتیب بر نقاط A' ، B' و C' منطبق شوند ؛ در این‌صورت ، نقطهٔ M'' نیز بر نقطهٔ M' منطبق خواهدشد ؛ زیرا اگر نقطهٔ M'' بر نقطهٔ دیگری مانند M_1 از صفحهٔ P' منطبق شود ، ازیك طرف خواهیم داشت :

$A''M''=A'M'$ و از طرف دیگر ، $A''M''=A'M_1$ ؛ پس : $A'M'=A'M_1$ ؛ بنابراین ، نقطهٔ A' روی عمودمنصف قطعه خط $M'M_1$ واقع است و همین استدلال را می‌توان دربارهٔ نقاط B' و C' تکرارکرد یعنی نقاط A' و B' و C' هر سه روی عمودمنصف قطعه ـ خط $M'M_1$ واقع هستند و این ممکن نیست ؛ زیرا چون نقاط A و B و C بر یك استقامت نیستند ، نقاط A' و B' و C' نیز روی یك خط راست واقع نمی‌باشند ؛ بنابراین همانطور که گفتیم نقطهٔ M'' بر M' منطبق می‌شود . به همین ترتیب ، هر نقطه از شکل F'' بر شکل F' و هر نقطه ازشکل F' بر شکل F'' منطبق می‌شود ؛ پس این دو شکل متساویند .

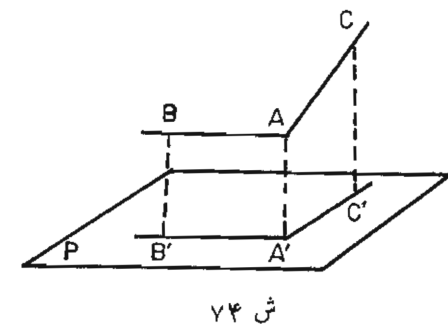
۹۳ ـ نتیجه ـ تصویر هر شکل مسطح F که صفحه‌اش با صفحهٔ تصویر موازی باشد ، با خود آن شکل مساوی است .

تصویر قائم یك زاویهٔ قائمه بر یك صفحه

۹۴ ـ قضیهٔ ۱ ـ اگر یك‌ضلع زاویهٔ قائمه‌ای با صفحهٔ تصویرموازی

باشد (و ضلع دیگر آن برصفحهٔ تصویر عمود نباشد) تصویر آن نیز یك زاویهٔ قائمه است .

زاویهٔ قائمهٔ BAC و صفحهٔ P را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که ضلع AB با صفحهٔ P موازی باشد (و ضلع AC برصفحهٔ P عمود نباشد) ؛ تصاویر نقاط A و B و C را بر صفحهٔ P بترتیب A' و B' و C' می‌نامیم (شکل ۷۴) .



ش ۷۴

خط $A'B'$ با خط AB موازی است (شمارهٔ ۸۸) ؛ بنابراین ، $A'B'$ بر خط AC عمود است ؛ از طرف دیگر ، خط $A'B'$ که در صفحهٔ P واقع است ، بر خط AA' که بر این صفحه عمود است،عمود می‌باشد ؛ پس خط $A'B'$ بر دوخط متقاطع از صفحهٔ $CAA'C'$ عمود است و بنابراین ، برصفحهٔ مزبور عمود می‌باشد ؛ یعنی بر جمیع خطوط راست واقع در آن صفحه ، و از جمله بر خط $A'C'$ عمود است ؛ پس زاویهٔ $B'A'C'$ قائمه است .

۹۵ ـ قضیهٔ ۲ـ اگر یك ضلع زاویه‌ای با صفحهٔ تصویر موازی باشد و تصویر آن زاویه یك زاویهٔ قائمه باشد ، خود آن زاویه نیز قائمه است .

زاویهٔ BAC و صفحهٔ P را در نظر می‌گیریم و تصاویر نقاط A و B و C را بر صفحهٔ P بترتیب A' و B' و C' می‌نامیم و فرض می‌کنیم ضلع AB با صفحهٔ P موازی و زاویهٔ $B'A'C'$ قائمه باشد (شکل ۷۴) .

خط AB با خط $A'B'$ موازی است (شمارهٔ ۸۸) ؛ بنابراین ، AB از یك طرف بر $A'C'$ عمود است (شمارهٔ ۱۸) و از طرف دیگر بر AA' عمود می‌باشد (شمارهٔ ۴۵) ؛ پس خط AB بر دو خط متقاطع از صفحهٔ $CAA'C'$ عمود است و بر آن صفحه و همچنین بر جمیع خطوط راست واقع در آن صفحه و از جمله بر خط AC عمود است ؛ یعنی زاویهٔ BAC قائمه می‌باشد .

۹۶ ـ قضیهٔ ۳ ـ اگر تصویر یك زاویهٔ قائمه بر یك صفحه زاویهٔ قائمه باشد ، لااقل یکی از اضلاع آن زاویه با صفحهٔ تصویر موازی است .

زاویهٔ قائمهٔ BAC و صفحهٔ P را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم‌که تصویر زاویهٔ مزبور بر صفحهٔ P یعنی زاویهٔ $B'A'C'$ قائمه باشد (شکل ۷۴) .

اگر ضلع AC با صفحهٔ تصویر موازی باشد ، حکم ثابت است .
پس فرض می‌کنیم AC با صفحهٔ P موازی نباشد ؛ خط $A'C'$ که بر خط مصور AA' وهمچنین برخط $A'B'$ عموداست، برصفحهٔ $BAA'B'$ عمود می‌باشد و بنابراین ، برخط AB از این صفحه نیز عمود است ؛ پس خط AB بر دو خط غیرمتوازی AC و$A'C'$ ازصفحهٔ $CAA'C'$ عمود است و در نتیجه بر صفحهٔ مزبور عمود می‌باشد و بر خط AA' که در این صفحه واقع است نیز عمود است ؛ حال گوییم دو خط AB و $A'B'$ که دریك صفحه واقع‌هستند و بر AA' عمود می‌باشند،متوازی هستند و بنابراین ، AB با صفحهٔ P موازی است .

۹۷ ـ خلاصه ـ می‌توان سه قضیهٔ اخیر را اینطور خلاصه‌کرد :

اگر زاویه‌ای دو شرط ازسه شرط زیر را دارا باشد ، شرط دیگر را نیز داراست :

۱ـ قائمه بودن . ۲ـ موازی بودن یکی از اضلاع با صفحهٔ تصویر .

۳ـ قائمه بودن تصویر زاویه بر صفحه .

و به این ترتیب ، واضح می‌شودکه هر دو قضیهٔ اختیاری ازقضایای ۹۴ و ۹۵ و ۹۶ را می‌توان عکس قضیهٔ دیگر دانست .

۹۸ـ و نیز می‌توان از سه قضیهٔ نامبرده احکام زیر را نتیجه گرفت :

اولاً : **برای آنکه تصویر قائم یك زاویهٔ قائمه بر یك صفحه زاویهٔ قائمه باشد ، لازم و کافی است‌که یکی از اضلاع آن زاویه با صفحهٔ تصویر موازی باشد .**

لزوم شرط ، از قضیهٔ ۳ شمارهٔ ۹۶ وکفایت‌آن ، از قضیهٔ ۱شمارهٔ ۹۴ واضح می‌شود .

ثانیاً : **برای آنکه زاویه‌ای که یکی از اضلاعش با صفحهٔ تصویر موازی است قائمه باشد ، لازم وکافی است که تصویر آن قائمه باشد .**

لزوم شرط ، از قضیهٔ ۱ شمارهٔ ۹۴ وکفایت آن ، از قضیهٔ ۲شمارهٔ ۹۵ روشن می‌شود .

۹۹ ـ تبصره ـ اولاً در قضایای ۱ و ۲ شماره‌های ۹۴ و ۹۵ همواره می‌توان ضلع AB را واقع در صفحهٔ P فرض کرد (شمارهٔ ۹۳) و به این ترتیب ، قضایای مزبور همان قضیهٔ سه عمود و عکس آن می‌باشند که در شماره‌های ۵۵ و ۵۶ دیده‌ایم .

ثانیاً در قضایای ۱ و ۲ و ۳ می‌توان به‌جای اضلاع زاویهٔ BAC دو خط متنافر عمود بر هم اختیارکرد (در این صورت ، قضایای مزبور را بیان کنید) .

۷ـ زاویهٔ خط راست با صفحه

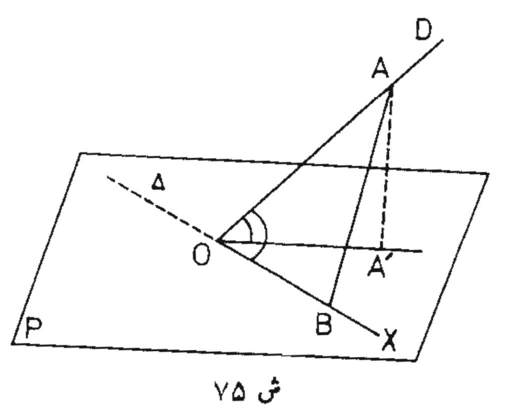
۱۰۰ ـ تعریف ـ اگرخطی بر یك صفحه عمودنباشد ، زاویهٔ حاده‌ای را که آن خط با تصویر خود برآن صفحه پدید می‌آورد ، زاویهٔ آن خط با آن صفحه یا میل آن خط نسبت به‌آن صفحه می‌نامند .

اگر خطی با یك صفحه موازی باشد ، زاویهٔ آن خط با آن صفحه صفر است . اگر خطی بر یك صفحه عمود باشد ، چون بر جمیع خطوط آن صفحه عمود است ، اصطلاحاً می‌گویند که زاویهٔ آن خط با آن صفحه قائمه است .

۱۰۱ ـ قضیه ـ میل یك خط نسبت به‌یك‌صفحه ،کوچکترین زاویه‌ای است که خط مزبور با خطوط آن صفحه پدید می‌آورد .

خط راست D و صفحهٔ P را در نظر می‌گیریم و فصل مشترك آنها را O می‌نامیم و از نقطهٔ اختیاری A واقع بر خط D عمود AA' را بر صفحهٔ P فرود می‌آوریم ؛ خط OA' تصویر خط D بر صفحهٔ P و زاویهٔ AOA' میل خط D نسبت به صفحهٔ P است ؛ باید ثابت کنیم که این زاویه از زاویه‌ای که خط D با هر یك از خطوط صفحهٔ

P مثلاً با خط Δ پدید می‌آورد ، کوچکتر است . البته نظر به تعریف



ش ۷۵

زاویهٔ دو خط در فضا (شمارهٔ ۱۷) ، می‌توانیم فرض کنیم که خط Δ از نقطهٔ O می‌گذرد .

اگر خطوط D و Δ برهم عمود یعنی زوایای آنها قائمه باشند ، چون زاویهٔ AOA' بنا به فرض حاده است ، قضیه ثابت است و اگر D و Δ بر هم عمود نباشند ، خط Δ در نقطهٔ O به دو نیم‌خط تقسیم می‌شود که یکی از آنها با نیم‌خط OA زاویهٔ حاده و دیگری زاویهٔ منفرجه پدید می‌آورد ؛ نیمی از خط Δ را که با OA زاویهٔ حاده پدید می‌آورد ، Ox می‌نامیم ؛ روی Ox نقطهٔ B را طوری اختیار می‌کنیم که OB مساوی با OA' باشد ؛ دومثلث OAA' و OAB در ضلع OA مشترکند و دارای دو ضلع متساوی OA' و OB می‌باشند ولی اضلاع سوم آنها ، AA' و AB ، متساوی نیستند ، یعنی $AB > AA'$ (عمود و مایل نسبت به صفحهٔ P) ؛ پس زوایای مقابل به این دو ضلع نیز متساوی نیستند ؛ یعنی $\widehat{AOB} > \widehat{AOA'}$.

۱۰۲ ـ شیب یك خط نسبت به یك صفحه ـ تانژانت زاویهٔ هر خط راست را با یك صفحه ، **شیب** آن خط نسبت به‌آن صفحه می‌نامند . در شکل ۷۵ شیب خط OA نسبت به صفحهٔ P عبارت است از:

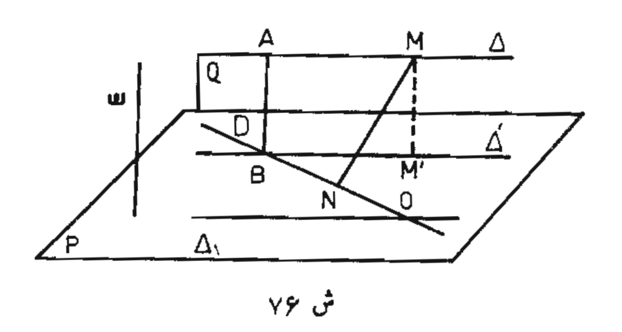
$$tg\,\widehat{AOA'} = \frac{A'A}{OA'}$$

۸ ـ عمود مشترك دو خط متنافر

۱۰۳ ـ مسئله ـ دو خط متنافر D و Δ مفروضند ؛ می‌خواهیم خطی معین کنیم که بر هر دو خط مزبور عمود باشد و هر دوی آنها را قطع کند .

برخط D صفحه‌ای به موازات خط Δ به این طریق می‌گذرانیم (شمارهٔ ۲۴) : نقطه‌ای مانند O روی خط D اختیارکرده و از آن نقطه خط Δ_1 را به موازات Δ می‌کشیم ؛ صفحهٔ P که از دو خط D و Δ_1 می‌گذرد ، با خط Δ موازی است (شکل ۷۶) . اگر خطی هم بر Δ_1 وهم D عمود باشد ، برصفحهٔ P عمود خواهد بود و بعکس ؛ پس راستای خط مطلوب، راستای خطی است مانند ω که عمود بر صفحهٔ P رسم شود و کافی است خطی معین کنیم که با ω موازی باشد و Δ و D را قطع کند . اما هر خط مانند MM' که با ω موازی باشد و خط Δ را قطع کند درصفحه‌ای واقع است‌که ازخط Δ بگذرد و برصفحهٔ P عمود شود؛ این صفحه را که در واقع صفحهٔ مصور خط Δ بر صفحهٔ P می‌باشد ، صفحهٔ Q می‌نامیم . فصل مشترك صفحهٔ Q با صفحهٔ P که در واقع تصویر خط Δ بر صفحهٔ P است و آن را Δ' می‌نامیم ، با خط D موازی

نیست* و آن را در نقطه‌ای مانند B قطع می‌کند. خطی که از نقطهٔ B به‌موازات ω (یعنی عمود بر صفحهٔ P) رسم شود، درصفحهٔ Q واقع می‌شود و خط Δ را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کند. خط AB که خطوط D و Δ را قطع می‌کند و بر آنها عمود است، جواب مسئله می‌باشد.



ش ۷۶

بطورخلاصه ـ برای حل مسئله، بر خط D صفحهٔ P را به موازات خط Δ مرور می‌دهیم و خط Δ را روی این صفحه تصویر می‌کنیم و فصل مشترك تصویر آن را با خط D نقطهٔ B می‌نامیم؛ عمودی که از نقطهٔ B بر صفحهٔ P رسم شود، خط Δ را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کند و جواب مسئله است.

بحث ـ چون خطوط D و Δ بنا به فرض متنافرند، صفحهٔ P وجود دارد و منحصر به فرد می‌باشد (شمارهٔ ۲۴)؛ وهمانطورکه درضمن استدلال فوق‌گفتیم، نقطهٔ B وجود دارد و البته منحصر به فرد می‌باشد؛

* زیرا خطوط D و Δ بنا به فرض متنافرند و خط Δ' که با Δ موازی است (شمارهٔ ۸۸) نمی‌تواند با D موازی باشد و چون خطوط D و Δ' در صفحهٔ P واقع هستند و متوازی نیستند یکدیگر را قطع می‌کنند.

پس مسئله همواره ممکن است وفقط یك جواب دارد.

۱۰۴ ـ از آنچه در شمارهٔ ۱۰۳ گفتیم، قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود:

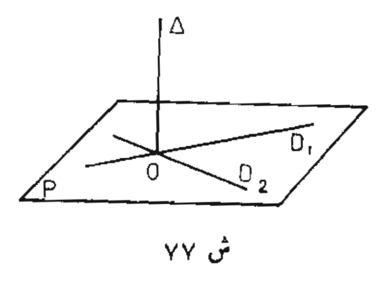
قضیه ـ هرگاه دو خط متنافر مفروض باشند، همواره یك خط راست می‌توان یافت‌که هم بر هر دوی آنها عمود باشد و هم هر دوی‌آنها را قطع کند.

۱۰۵ ـ تعریف ـ خطی‌که بردو خط متنافر عمود باشد و هردوی آنها را قطع‌کند، **عمود مشترك** دو خط مزبور نامیده می‌شود.

۱۰۶ ـ تمرین ـ اولا تحقیق کنید که برای ساختن عمود مشترك دو خط D و Δ، پس‌از تعیین داستای ω، کافی است یك صفحه بر خط D به موازات ω ویك صفحه نیز برخط Δ به موازات ω مرور دهیم؛ فصل‌مشترك این دو صفحه، عمود مشترك مطلوب خواهد بود (شکل۷۶).

ثانیاً تحقیق کنید که اگر دو خط متنافر بر هم عمود باشند، عمود مشترك آنها عبارت است از فصل مشترك دو صفحه‌ای که بر هر یك از آن دو خط بگذرد و بر دیگری عمود شود.

۱۰۷ ـ تبصره ـ اگر دو خط متقاطع باشند، خطی‌که از نقطهٔ تقاطعشان برصفحهٔ آنها عمود شود، تنها خطی است که هر دوی آنها را قطع می‌کند و بر هر دوی‌آنها عمود است؛ در این حالت، این خط را عمود مشترك دو خط مزبور می‌نامند (شکل ۷۷).



ش ۷۷

اگر دوخط متوازی باشند، هر خط که در صفحهٔ آنها عمود بر یکی از آنها رسم شود، بر دیگری نیز عمود است و دو خط مزبور بینهایت عمود مشترك دارند.

اقصر فاصلهٔ دو خط متنافر

۱۰۸ ـ قضیه ـ قطعه‌ای از عمود مشترک دو خط متنافر که بین آن دوخط محصور است ،کوتاهترین قطعه‌خطی است‌که یك نقطه ازخط اول را به یك نقطه از خط دوم وصل می‌کند .

طول این قطعه خط را **اقصر فاصلهٔ دو خط متنافر** می‌نامند .

نقطهٔ دلخواه M را روی خط Δ و نقطهٔ دلخواه N را روی خط D اختیار می‌کنیم (شکل۷۶) ؛ چون Δ با صفحهٔ P موازی است، نظر به شمارهٔ ۶۲ داریم : $AB=MM'$ ؛ اما قطعه‌خط MM' که بر صفحهٔ P عمود است ، از قطعه‌خط MN که نسبت به صفحهٔ P مایل می‌باشد ، کوچکتر است ؛ پس $AB < MN$.

خاطر نشان می‌کنیم که طول AB عبارت است از فاصلهٔ خط Δ از صفحهٔ P یا فاصلهٔ دو صفحهٔ متوازی که یکی شامل خط Δ و دیگری شامل خط D باشد .

۱۰۹ ـ تبصره ـ اگر دو خط متقاطع باشند ، اقصر فاصلهٔ آنها صفر است و اگر دو خط متوازی باشند ، فاصلهٔ آن دو خط متوازی اقصر فاصلهٔ آنهاست .

۹ ـ مساحت تصویر یك شكل مسطح بر یك صفحه

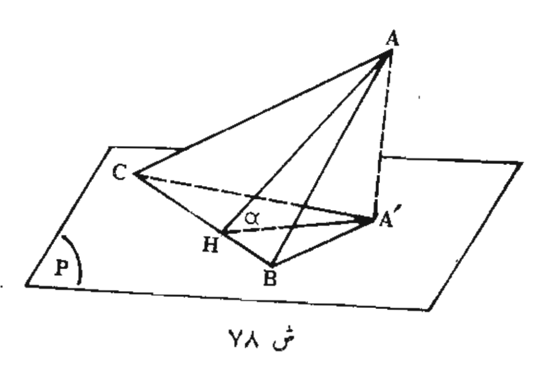
۱۱۰ ـ قضیه ـ مساحت تصویر یك چندضلعی مسطح بر یك صفحه ، مساوی است با حاصل ضرب مساحت آن چندضلعی در کسینوس زاویهٔ* حاده‌ای که صفحهٔ چندضلعی مزبور با صفحهٔ تصویر پدید می‌آورد .

* به شمارهٔ ۷۷ مراجعه کنید .

برای اثبات این قضیه سه حالت تمیز می‌دهیم :

حالت اول ـ مساحت تصویر مثلثی که یك ضلعش با صفحهٔ تصویر موازی یا در صفحهٔ تصویر واقع است .

مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که ضلع BC از این مثلث ، با صفحهٔ تصویر موازی باشد و چون تصاویر یك شكل روی دو صفحهٔ متوازی همواره با هم مساویند (شمارهٔ۹۲) ، می‌توان به‌جای صفحهٔ تصویر، صفحهٔ P را که شامل BC و با صفحهٔ تصویر موازی است ، اختیار کرد (شکل ۷۸) .



ش ۷۸

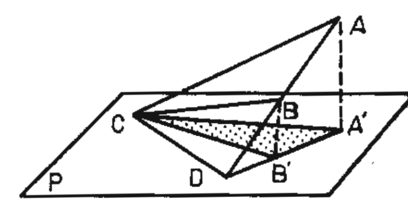
تصویر نقطهٔ A را بر صفحهٔ P نقطهٔ A' می‌نامیم و ارتفاع AH از مثلث ABC را رسم می‌کنیم ؛ مثلث $A'BC$ تصویر مثلث ABC بر صفحهٔ P است وچون ضلع HC از زاویهٔ قائمهٔ AHC در صفحهٔ P واقع است ، تصویر زاویهٔ مزبور بر صفحهٔ P یعنی زاویهٔ $A'HC$ قائمه است (شمارهٔ ۹۴) ؛ بنابراین ، $A'H$ ارتفاع نظیر رأس A' از مثلث $A'BC$ می‌باشد واز طرف دیگر، زاویهٔ AHA' که‌آن را α می‌نامیم، مسطحهٔ فرجهٔ (A' و BC و A) است و اگر مساحت مثلث ABC را S و مساحت مثلث $A'BC$ را S' بنامیم ، داریم :

$$A'H = AH \times \cos\alpha \qquad \text{(شمارهٔ ۸۹)}$$

$$S'=\frac{1}{2}BC\times A'H=\frac{1}{2}BC\times AH\cos\alpha=S\times\cos\alpha$$

حالت دوم ـ مساحت تصویر یك مثلث دلخواه .

اگر هیچیك از اضلاع مثلث ABC با صفحهٔ تصویر موازی نباشد، از نقاط A و B و C سه صفحهٔ متمایز می‌توان به موازات صفحهٔ تصویر مرور داد که یکی از آنها مابین دو صفحهٔ دیگر واقع نباشد ؛ فرض می‌کنیم از این سه صفحه ، صفحهٔ P که از رأس C به موازات صفحهٔ تصویر می‌گذرد ، مابین دو صفحهٔ دیگر واقع نباشد وصفحهٔ P رابه‌جای صفحهٔ تصویر اختیار می‌کنیم (شمارهٔ ۹۲) ؛ خط AB صفحهٔ P را در نقطه‌ای مانند D که در خارج قطعه خط AB واقع است ، قطع می‌کند (شکل ۷۹) ؛ اگر در این حالت نیز زاویهٔ صفحهٔ ABC با صفحهٔ P را زاویهٔ α بنامیم ، نظر به حالت اول می‌توان نوشت :



ش ۷۹

(مساحت مثلث ADC) $\times\cos\alpha$ = (مساحت مثلث A'DC)

و (مساحت مثلث BDC) $\times\cos\alpha$ = (مساحت مثلث B'DC)

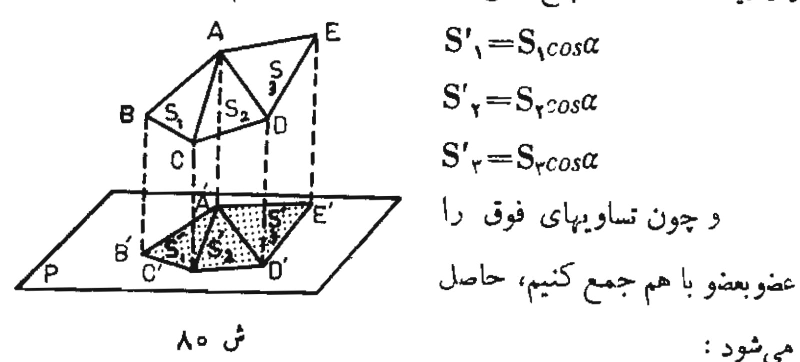
وچون‌طرفین تساوی دوم را از طرفین تساوی اول کم‌کنیم، حاصل می‌شود :

(مساحت مثلث ABC) $\times\cos\alpha$ = (مساحت مثلث A'B'C)

حالت سوم ـ مساحت تصویر یك چندضلعی .

مثلا پنج‌ضلعی ABCDE را در نظر می‌گیریم و تصویر آن را روی صفحهٔ P پنج ضلعی A'B'C'D'E' می‌نامیم (شکل ۸۰) ؛

با رسم‌کردن قطرهایی از پنج‌ضلعی مفروض‌که از رأس A می‌گذرند، سه مثلث پدید می‌آید که مساحتهای آنها را S_1 و S_2 و S_3 می‌نامیم ؛ اگر S'_1 و S'_2 و S'_3 بترتیب، مساحات‌تصاویر مثلثهای مزبور برصفحهٔ P باشند و زاویهٔ حادهٔ صفحهٔ پنج‌ضلعی با صفحهٔ P را α بنامیم ، می‌توان نوشت:



ش ۸۰

$$S'_1=S_1\cos\alpha$$
$$S'_2=S_2\cos\alpha$$
$$S'_3=S_3\cos\alpha$$

و چون تساویهای فوق را عضوبعضو با هم جمع کنیم، حاصل می‌شود :

(مساحت ABCDE) $\times\cos\alpha$ = (مساحت A'B'C'D'E')

بطور کلی ، اگر مساحت یك چندضلعی مسطح را S و مساحت تصویر آن را S' و زاویهٔ صفحهٔ چندضلعی با صفحهٔ تصویر را α بنامیم ، داریم :

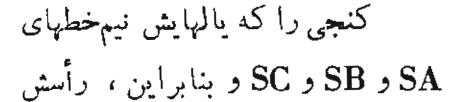
$$S'=S\cos\alpha \qquad (1)$$

درصورتی‌که صفحهٔ چندضلعی با صفحهٔ تصویرموازی باشد ، $\cos\alpha$ مساوی با یك است ومساحت تصویر چندضلعی با مساحت خود آن چند ـ ضلعی مساوی است .

۱۰ ـ کنج یا زاویهٔ سه وجهی

۱۱۱ ـ تعریف ـ سه نیمخط SA و SB و SC را که در مبدأ

مشترك باشند و دريك صفحه واقع نباشند، درنظر می‌گیریم (شکل۸۱)؛ هریك از ناحیه‌هایی را که سه صفحهٔ ASB و BSC و CSA توأماً از فضا جدا می‌سازند ، **کنج سه وجهی** یا **زاویهٔ سه وجهی** می‌نامند[1] . **نقطهٔ** S مشترك بین‌صفحات نامبرده را **رأس** و هریك از صفحات مذکور را **وجه** وفصل مشترك هردووجه را **یال** و زاویهٔ بین هر دویال را **زاویه** و فرجهٔ بین هردو وجه را **فرجهٔ** کنج سه وجهی می‌خوانند .



ش ۸۱

کنجی را که یالهایش نیم‌خطهای SA و SB و SC و بنابراین ، رأسش S و وجوهش سه صفحهٔ ASB و BSC و CSA می‌باشد ، با علامت قراردادی S.ABC می‌نمایانند .

یالها و فرجه‌های SA و SB و SC را بترتیب **روبرو** یا **مقابل** به وجوه یا زوایای BSC و CSA و ASB می‌گویند .

۱۱۲ـ کنج سه قائمه ـ اگر از نقطهٔ S رأس زاویهٔ قائمهٔ ASB عمود SC را برصفحهٔ این زاویه اخراج کنیم، کنج سه وجهی S.ABC که هر سه زاویهٔ‌آن قائمه هستند ، تشکیل می‌شود؛ این کنج را **کنج سه‌قائمه** می‌نامند

ش ۸۲

۱ ـ صفحات نامحدود ASB و BSC و CSA ، فضا را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند ؟

(شکل ۸۲) . هر یك از یالهای این کنج ، بروجه روبروی خود عمود است (شمارهٔ۴۱) وهریك ازسه فرجهٔ این کنج ، قائمه هستند؛ زیرا مثلا زاویهٔ قائمهٔ ASB عبارت است اززاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ (B و SC و A).

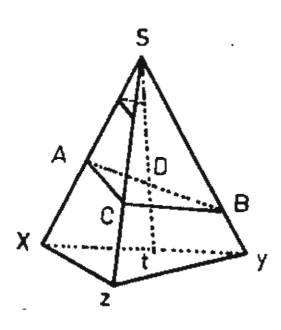
۱۱۳ ـ قضیه ـ در هرکنج سه‌وجهی هر زاویه از مجموع دو زاویهٔ دیگر کوچکتر است .

مثلا ثابت می‌کنیم که در کنج S.xyz زاویهٔ xSy از مجموع دو زاویهٔ دیگر کوچکتر است (شکل ۸۳) . البته استدلال در صورتی لزوم پیدا می‌کند که زاویهٔ xSy از هر یك از دو زاویهٔ دیگر بزرگتر باشد (وگرنه صحت قضیه واضح خواهد بود) ؛ پس فرض می‌کنیم :

$\widehat{xSy}>\widehat{ySz}$ و $\widehat{xSy}>\widehat{xSz}$ باشد.

حال ، در زاویهٔ xSy که بنا به فرض از زاویهٔ xSz بزرگتراست ، نیم‌خط St را طوری رسم می‌کنیم که داشته باشیم :

$$\widehat{xSt}=\widehat{xSz} \qquad (1)$$



ش ۸۳

و روی نیم‌خطهای Sx و Sy بترتیب ، نقاط دلخواه A و B را اختیار و خط AB را رسم می‌کنیم تا نیم‌خط St را در نقطهٔ D قطع کند و روی نیم‌خط Sz نقطهٔ C را طوری اختیار می‌کنیم که داشته باشیم SC=SD ؛ از تقاطع صفحه‌ای که از سه نقطهٔ A و B و C می‌گذرد با وجوه کنج مفروض ، مثلث ABC پدید می‌آید .

دو مثلث ASC و ASD (در حالت دو ضلع و زاویهٔ بین آنها)

متساویند بنابراین ، $AD=AC$ ؛ و در مثلث ABC داریم :

$AB<AC+CB$ یا $AD+DB<AC+CB$؛ وچون $AD=AC$،

$$DB<CB$$

حال گوییم در دو مثلث BSC و BSD دو ضلع از یکی با دو ضلع از دیگری مساوی است ($SC=SD$ و SB مشترك) ولی اضلاع سوم آنها متساوی نیستند ($DB<CB$) ؛ پس زوایای روبروی این دو ضلع نیز متساوی نیستند و داریم :
$$\widehat{DSB}<\widehat{CSB}$$

با در نظر گرفتن تساوی (۱) ، می‌توان نامساوی فوق را به این صورت نوشت :
$$\widehat{ASD}+\widehat{DSB}<\widehat{ASC}+\widehat{CSB}$$

یا :
$$\boxed{\widehat{ASB}<\widehat{ASC}+\widehat{CSB}}$$

۱۱۴ ـ نتیجه ـ در هرکنج‌سه‌وجهی هرزاویه از تفاضل دو زاویهٔ دیگر بزرگتر است .

مثلا اگر در کنج سه وجهی $S.ABC$ داشته باشیم :

$$\widehat{ASB}\geqslant\widehat{CSB} \quad و \quad \widehat{ASB}\geqslant\widehat{ASC}$$

از قضیهٔ ۱۱۳ معلوم می‌شود :

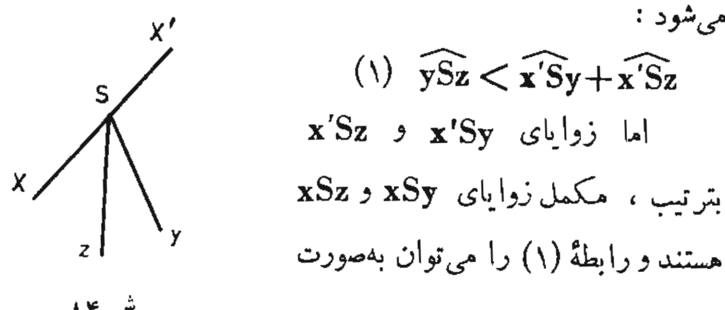
$$\widehat{ASC}+\widehat{CSB}>\widehat{ASB}$$

و از آنجا
$$\boxed{\widehat{ASC}>\widehat{ASB}-\widehat{CSB}} \quad و \quad \boxed{\widehat{CSB}>\widehat{ASB}-\widehat{ASC}}$$

۱۱۵ ـ قضیه ـ در هر کنج سه وجهی ، مجموع سه زاویه از چهار قائمه کوچکتر است .

(این قضیه حالت خاصی است از قضیهٔ شمارهٔ ۱۱۸ که بعداً خواهیم دید) .

کنج سه‌وجهی $S.xyz$ را در نظر می‌گیریم و یال Sx را از طرف S امتداد می‌دهیم تا نیم‌خط Sx' بدست آید (شکل ۸۴) ؛ چون قضیهٔ ۱۱۳ را در مورد کنج سه‌وجهی $S.x'yz$ بکار بریم ، حاصل می‌شود :



ش ۸۴

$$(۱) \quad \widehat{ySz}<\widehat{x'Sy}+\widehat{x'Sz}$$

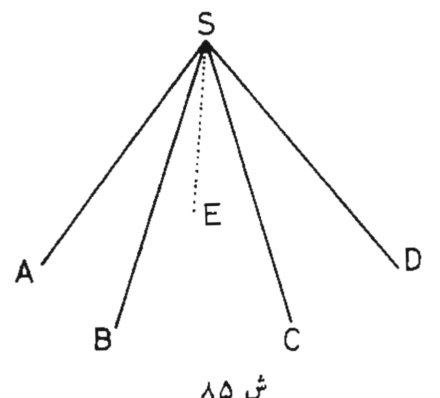
اما زوایای $x'Sy$ و $x'Sz$ بترتیب ، مکمل زوایای xSy و xSz هستند و رابطهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\widehat{ySz}<(180^\circ-\widehat{xSy})+(180^\circ-\widehat{xSz})$$

و از آنجا :
$$\widehat{ySz}+\widehat{xSy}+\widehat{xSz}<360^\circ$$

۱۱ ـ کنج یا زاویهٔ چندوجهی

۱۱۶ ـ تعریف ـ چندین صفحهٔ متقاطع که بر یك نقطه بگذرند (فصل مشترکهای آنها بر یك نقطه مرور کنند) ، توأماً فضا را به چندین ناحیه تقسیم می‌کنند که هر یك را **کنج (یا زاویهٔ چندوجهی)** می‌نامند .



ش ۸۵

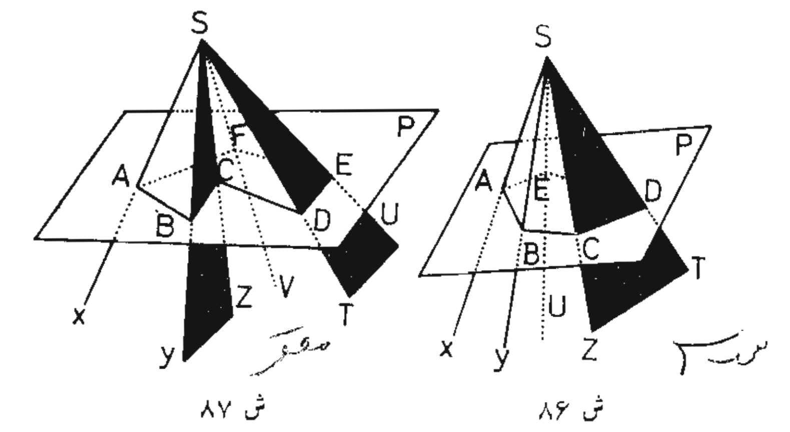
نقطهٔ تقاطع صفحات را

رأس کنج و هریك از صفحات را **وجه** کنج و هر فصل مشترك را **یال** کنج و زاویهٔ بین هر دویال واقع دریك وجه را **زاویهٔ** کنج می‌خوانند.

معمولا هر کنج چندوجهی را با عدهٔ وجوهش تشخیص می‌دهند وآن را با حرف رأس ویك حرف از هریال می‌خوانند وچنانچه اشتباهی رخ ندهد ، فقط به‌خواندن حرف رأس کنج نیز می‌توان اکتفا کرد .

مثلا شکل ۸۵ نمایش یك‌کنج پنج‌وجهی S.ABCDE به **رأس** S است‌که هر یك ازصفحات ASB و BSC و CSD و DSE و ESA یك **وجه** آن و هریك از نیم خطهای SA و SB و SC و SD و SE (مشترك بین دو وجه) یك **یال** آن و هر یك از زوایای ASB و BSC و CSD و DSE و ESA یك **زاویهٔ** آن است .

۱۱۷ ـ کنج محدب ـ اگر یك کنج چند وجهی بتمامی در یك طرف هریك از وجوه خود واقع شود ، آن را کنج چند وجهی **محدب**



ش ۸۷ ش ۸۶

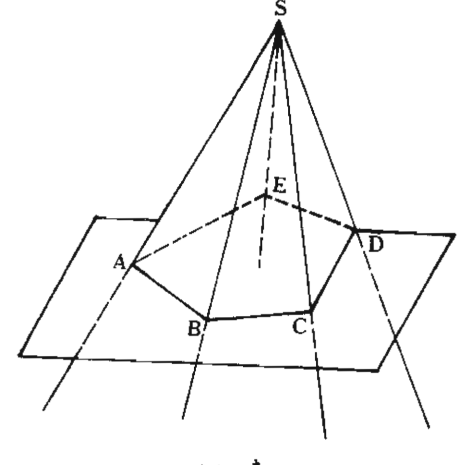
می‌نامند (شکل ۸۶) و در غیر این صورت ، کنج را **مقعر** می‌گویند (شکل ۸۷) .

واضح است که هر کنج سه‌وجهی محدب می‌باشد .

برای بدست آوردن یك‌کنج چندوجهی محدب ، کافی است‌که یك نقطهٔ دلخواه مانند S در خارج صفحهٔ یك چند ضلعی مسطح و محدب اختیارکرده وآن نقطه را به جمیع رأسهای چندضلعی مزبور وصل کنیم و امتداد دهیم (شکل ۸۶) .

۱۱۸ ـ قضیه ـ مجموع زوایای‌هرکنج چندوجهی محدب، از چهار قائمه کوچکتر است .

یك کنج چند وجهی محدب در نظر می‌گیریم و صفحه‌ای اختیار می‌کنیم‌که جمیع یالهای آن را قطع کند و مقطع این صفحه را در کنج مفروض ، چندضلعی ABCDE می‌نامیم ؛ می‌دانیم که این چند ضلعی ، محدب است (شکل۸۸) ؛ هریك ازنقاط A و B و C و . . . رأس یك کنج سه وجهی است (مانند A.BSE و B.CSA و C.DSB و ...) ، و نظر به قضیهٔ شمارهٔ ۱۱۳ می‌توان نوشت :



ش ۸۸

$\widehat{ABC}<\widehat{ABS}+\widehat{SBC}$ (درکنج B.CSA)

و $\widehat{BCD}<\widehat{BCS}+\widehat{SCD}$ (« C.DSB)

و $\widehat{CDE}<\widehat{CDS}+\widehat{SDE}$ (« D.ESC)

و $\widehat{DEA}<\widehat{DES}+\widehat{SEA}$ (« E.ASD)

و $\widehat{EAB}<\widehat{EAS}+\widehat{SAB}$ (« A.BSE)

این نامساویها را عضو بعضو با هم جمع می‌کنیم ؛ مجموع سمت چپ ، عبارت است از مجموع زوایای داخلی چندضلعی محدب مقطع و اگرکنج n وجهی باشد ، این مقطع یك n ضلعی محدب است ومجموع زوایای داخلی آن ، ۲n − ۴ زاویهٔ قائمه می‌باشد .

مجموع طرف راست ، عبارت است از مجموع زوایای مجاور به قاعدهٔ n مثلث جانبی ازقبیل SAB و SBC وغیره ؛ می‌دانیم‌که مجموع زوایای داخلی n مثلث ، مساوی است با ۲n قائمه واگر مجموع زوایای کنج مفروض را S بنامیم ، مجموع طرف دوم مساوی است با (S − قائمه ۲n) و بنابراین :

S − قائمه ۲n > قائمه (۲n − ۴)

و از آنجا :

S < ۴قائمه

تمرین ـ ثابت‌کنیدکه درهرکنج چندوجهی،هرزاویه ازمجموع‌زوایای دیگر کوچکتر است .

۱۱۹- مقطعهای یك‌کنج چند وجهی به وسیلهٔ دو صفحهٔ متوازی. کنج چند ـ وجهی O . xyztu را درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم که دو صفحهٔ متوازی P و P' جمیع یالهای این‌کنج را قطع کنند و فصل مشترك

ش ۸۹

یالهای Sx و Sy و Sz و St و Su رابا صفحهٔ P ، نقاط A و B و C و D و E وباصفحهٔ P'، نقاط A' وB' و C' و D' و E' می‌نامیم(شکل۸۹)، وهر دو رأس از دو چندضلعی ABCDE و A'B'C'D'E' راکه روی یك یال‌کنج واقع باشند ، مانند A و A' ، رأسهای متناظر وهر دوضلع ازآنها راکه روی‌یك‌وجه‌کنج قرار داشته باشند (مانند AB و A'B')، ضلعهای متناظر می‌گوییم .

واضح است‌که هر دو ضلع متناظر از دو چندضلعی مقطع ، با هم موازیند ؛ زیرا این دو ضلع ، فصل مشترکهای یك صفحه با دو صفحهٔ متوازی می‌باشند ؛ وهمچنین هردوزاویهٔ متناظرمانند ABC و A'B'C' از این دو چند ضلعی با هم مساویند ؛ زیرا اضلاع آنها نظیر بنظیر متوازی و متحدالجهت می‌باشند ؛ و از تشابه مثلثهایی مانند OAB و OA'B' و غیره حاصل می‌شود :

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{OB'}{OB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{OC'}{OC}=\cdots$$

و از آنجا

$$\boxed{\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE}=\frac{E'A'}{EA}}$$

از آنچه گفتیم ، قضیهٔ زیر بدست می‌آید :

قضیه : **اگر دو صفحهٔ متوازی جمیع یالهای یك‌کنج را قطع کنند، دردوچندضلعی‌مقطع،زوایای متناظر باهم‌مساویند و اضلاع هریك از این دو چند ضلعی با اضلاع نظیر خود از چندضلعی دیگر متناسبند .**

۱۲۰ ـ نتیجه ـ فرض کنیم که کنج O . xyztu محدب باشد

(شکل۸۹) ؛ مساحت چندضلعی $A'B'C'D'E'$ عبارت است از مجموع مساحات مثلثهای $A'B'C'$ و $A'C'D'$ و $A'D'E'$ که بترتیب ، با مثلثهای ABC و ACD و ADE مشابه می‌باشند ؛ نسبت تشابه هر یك ازمثلثهای اول بهمثلث مشابه خود عبارت است از $\frac{OA'}{OA}$ ؛ یا اگر تصاویر نقطهٔ O برصفحات مقطع را H و H' بنامیم ، نسبت تشابه مزبور مساوی است با $\frac{OH'}{OH}$ ؛ و نظر به آنچه در هندسهٔ مسطحه دیده‌ایم ، می‌توان نوشت :

$$\frac{\text{مساحت}\ A'D'E'}{\text{مساحت}\ ADE}=\frac{\text{مساحت}\ A'C'D'}{\text{مساحت}\ ACD}=\frac{\text{مساحت}\ A'B'C'}{\text{مساحت}\ ABC}=\left(\frac{OH'}{OH}\right)^2$$

و ازاین رو ، نتیجه می‌شود :

$$\boxed{\frac{\text{مساحت}\ A'B'C'D'E'}{\text{مساحت}\ ABCDE}=\frac{OH'^2}{OH^2}}$$

یعنی : **اگر دو صفحهٔ متوازی جمیع یالهای یك کنج محدب را قطع کنند ، نسبت مساحات دو مقطع مساوی است با نسبت مربعات فواصل راس کنج از دو صفحهٔ قاطع .**

تمرین

۱ ـ ثابت کنید که سه خط راست که دو بدو متقاطع باشند ، یا در یك صفحه واقعند یا از یك نقطه می‌گذرند .

۲ ـ ثابت‌کنیدکه اگر سه صفحه دوبدو متقاطع باشند ، فصل مشترکهای آنها یا از یك نقطه می‌گذرند یا دوبدو متوازیند .

۳ ـ از نقطهٔ مفروض O خط راستی بگذرانید که خط راست معلوم D و دایرهٔ معلوم C را قطع‌کند .

۴ ـ قطعه‌خطی رسم‌کنید که یك سرش روی خط راست معلوم D و سر دیگرش روی صفحهٔ معلوم P واقع باشد و نقطهٔ مفروض O وسط آن قطعه ـ خط باشد .

۵ ـ ازنقطهٔ معلومی خط راستی بگذرانیدکه دوخط متنافر را قطع‌کند.

۶ ـ ثابت کنیدکه بینهایت خط راست می‌توان یافت که سه خط راست را که دوبدو متنافر هستند ، قطع‌کند .

خطوط و صفحات متوازی

۷ ـ صفحهٔ P ودونقطهٔ A و B درآن صفحه و نقطهٔ O درخارج آن مفروض است ؛ دو صفحه از OA و OB می‌گذرند و صفحهٔ P را در دو خط متوازی قطع می‌کنند ؛ مطلوب است تعیین مکان هندسی خط OD فصل مشترك این دوصفحه .

۸ ـ دو نقطهٔ O و O' و دوخط راست D و D' در فضا مفروضند ؛ دوخط متوازی معین کنیدکه یکی از آنها ازنقطهٔ O بگذرد و خط D را قطع کند و دیگری از نقطهٔ O' بگذرد و خط D' را قطع‌کند .

۹ ـ خط راستی معین کنید که خط راست معلوم D را قطع کند و با صفحهٔ مفروض P موازی باشد و از نقطهٔ معلوم O که در خارج خط D و صفحهٔ P واقع است ، بگذرد .

۱۰ ـ دوخط راست Δ و Δ' وخط راست D که باهیچیك ازآنهاموازی نیست مفروض است ؛ خط راستی معین کنید که Δ و Δ' را قطع کند و با D موازی باشد .

۱۱ ـ مطلوب است تعیین مکان هندسی اوساط قطعه خطهایی‌که با خط راست معلوم D موازی و دو سرشان در دو صفحهٔ معلوم واقع باشند .

۱۲ ـ نقطهٔ معلوم O در خارج صفحهٔ مفروض P واقع است ؛ مطلوب است مکان هندسی اوساط قطعه خطهایی که نقطهٔ O را به نقاط مختلف صفحهٔ P وصل می‌کنند .

۱۳ـ دوخط راست متنافر D و D' صفحهٔ P را درنقاط A و B قطع کرده‌اند ؛ قطعه خط MN را موازی با صفحهٔ P طوری معین کنید که یك سرش روی خط D و سر دیگرش روی خط D' و طولش l باشد.

۱۴ ـ ثابت کنید که در هر چهارضلعی معوج (یعنی چهارضلعیی که

رأسهایش در یك صفحه واقع نیستند) ، دو خط واصل بین اوساط اضلاع غیر متوالی و قطعه خطی که اوساط دو قطر را به هم وصل می‌کند ، در یك نقطه متقاطع هستند و این نقطه در وسط هریك از آنها واقع است .

۱۵ ـ چهار نقطهٔ A و B و C و D که در یك صفحه واقع نیستند ، مفروضند ؛ ثابت کنید که شش صفحه‌ای که شامل دو نقطهٔ دلخواه از نقاط مزبور و نیز شامل وسط قطعه‌خطی که دو نقطهٔ دیگر را به هم وصل می‌کند باشند ، از یك نقطه می‌گذرند .

خط و صفحهٔ عمود برهم

۱۶ ـ صفحهٔ P ونقطهٔ O درآن مفروضند ؛ از نقطهٔ O ودر صفحهٔ P عمودی بر خط مفروض D (غیر واقع در صفحهٔ P) معین کنید .

۱۷ ـ دایرهٔ C که در صفحهٔ P رسم شده است و نقطهٔ A در خارج صفحهٔ P مفروض است ؛ مطلوب است تعیین کوتاهترین وبلندترین قطعه‌خطی که نقطهٔ A را به یکی از نقاط دایرهٔ C وصل می‌کند .

۱۸ ـ خط راست D و دو نقطهٔ A و B که با خط D در یك صفحه واقع نیستند ، مفروضند ؛ روی خط D نقطه‌ای مانند C چنان معین کنید که مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد (سه حالت) .

۱۹ ـ مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی که از سه رأس یك مثلث به یك فاصله باشند .

۲۰ ـ نقطه‌ای تعیین‌کنید که از چهارنقطهٔ غیرواقع دریك صفحه به‌یك فاصله باشد .

۲۱ ـ مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی که از دو خط متوازی به یك فاصله باشند .

۲۲ ـ ثابت کنید که برای آنکه دو نقطهٔ معلوم A و B از صفحه‌ای مانند P به یك فاصله باشند ، لازم و کافی است که صفحهٔ P با خط AB موازی باشد یا از وسط قطعه‌خط AB بگذرد .

۲۳ ـ صفحه‌ای معین کنید که ازخط راست معلوم D بگذرد و دو نقطهٔ معلوم A و B ، از آن به یك فاصله باشند .

۲۴ ـ مثلث ABC و نقطهٔ O در خارج صفحهٔ آن مفروض است :

صفحه‌ای معین کنید که از نقطهٔ O بگذرد و نقاط A ، B و C ازآن به یك فاصله باشند (۴ جواب) .

۲۵ ـ چهار نقطهٔ A ، B ، C و D که در یك صفحه واقع نیستند ، مفروضند . صفحه‌ای معین کنیدکه ازاین چهارنقطه به‌یك فاصله‌باشد(۷جواب) .

۲۶ ـ مطلوب است تعیین مکان هندسی پاهای عمودهایی که از نقطهٔ معلوم O بر صفحاتی که از خط مفروض D می‌گذرند فرود آیند .

۲۷ ـ مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاط M واقع در صفحهٔ P که ازآن نقاط ، قطعه‌خط AB واقع در خارج صفحهٔ P به زاویهٔ قائمه دیده شوند .

۲۸ ـ مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاط M از فضا که تفاضل مربعات فواصل آنها از دو نقطهٔ معلوم A و B مساوی k^2 باشد .

$$(\overline{MA}^2-\overline{MB}^2=k^2)$$

۲۹ ـ ثابت کنید که برای آنکه دو قطعه‌خط AB و CD بر هم عمود باشند ، لازم و کافی است که رابطهٔ $\overline{CA}^2-\overline{CB}^2=\overline{DA}^2-\overline{DB}^2$ برقرار باشد .

۳۰ ـ مطلوب است‌تعیین مکان هندسی نقاطی که از صفحهٔ P به فاصلهٔ معلوم l واقع باشند .

۳۱ ـ از نقطهٔ معلوم O صفحه‌ای بگذرانید که با خط راست معلوم D موازی و خط D از آن به فاصلهٔ معلوم l واقع باشد .

فرجه ـ صفحات عمود برهم ـ تصویر قائم

۳۲ ـ صفحهٔ P و خط D و نقطهٔ A در فضا مفروضند . از نقطهٔ A صفحه‌ای موازی با خط D و عمود برصفحهٔ P معین کنید .

۳۳ ـ از دوخط متنافر عمود برهم دوصفحه می‌گذرانیم که برهم عمود باشند . ثابت‌کنیدکه اگریکی‌ازاین دوصفحه تغییرکند، دیگری ثابت می‌ماند .

۳۴ ـ فرجهٔ $(P$ و $Q)$ و نقطهٔ A در وجه P و نقطهٔ B در وجه Q مفروض است . از خط AB صفحه‌ای بگذرانید که یال فرجه را در نقطه‌ای مانند M قطع کند بطوری که زاویهٔ AMB قائمه باشد .

۳۵ ـ مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی‌که از دو صفحهٔ متقاطع به یك فاصله باشند .

۳۶ ـ مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی که نسبت فواصل آنها از

دو صفحهٔ متقاطع عدد معلوم m باشد .

۳۷ ـ مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصلشان از دو صفحهٔ متقاطع مساوی با طول معلوم l باشد .

۳۸ ـ سه صفحهٔ P ، Q و R ازیك نقطه می‌گذرند. مطلوب‌است تعیین مکان هندسی نقاطی که از این سه صفحه به یك فاصله باشند .

۳۹ ـ مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع به یك فاصله باشند .

۴۰ ـ مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی که ازسه خط متقارب غیر واقع در یك صفحه به یك فاصله باشند .

۴۱ ـ دوخط راست متقاطع $x'Ox$ و $y'Oy$ مفروضند . مطلوب است تعیین مکان هندسی خطوط راستی‌که از نقطهٔ O بگذرند و با دو خط مزبور زوایای متساوی پدید آورند .

۴۲ ـ مطلوب است تعیین صفحه‌ای‌که اگریك چهارضلعی معوج مفروض را روی آن تصویر کنیم یك متوازی‌الاضلاع بدست آید .

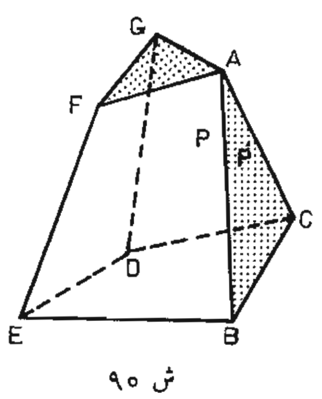


فصل دوم

۱ - چندوجهی و اقسام آن

۱۲۱ ـ تعریف ـ درهندسهٔ مسطحه (هندسهٔ سال چهارم)دیده‌اید که هر خط شکستهٔ مسدود که روی یك صفحه رسم شود ، به شرط آنکه خودش را قطع نکند ، یك ناحیهٔ محدود از صفحه را در برمی‌گیرد . در هندسهٔ فضایی‌این ناحیهٔ محدود ازصفحه را **چندضلعی مسطح** می‌نامیم.

جسمی راکه سطحش منحصراً ازچندضلعیهای مسطح تشکیل شده باشد، چندوجهی می‌نامند . و هر یك از این چندضلعیها را یك **وجه** و هر یك از اضلاع آنها را یك **یال** و هر یك از رأسهای آنها را یك **رأس** چندوجهی می‌گویند . (شکل ۹۵) . هر دو وجه مجاور به هم در یك یال مشترکند و فرجه‌ای پدید می‌آورند که آن را یك **فرجهٔ جسم** می‌گویند و هر چند یال که از یك رأس می‌گذرند یك کنج چندوجهی پدید می‌آورند که آن را یك **کنج جسم** می‌نامند. قطعه‌خطی که دو رأس غیرواقع در یك وجه را بههم وصل کند ، یك **قطر** چندوجهی نامیده می‌شود .

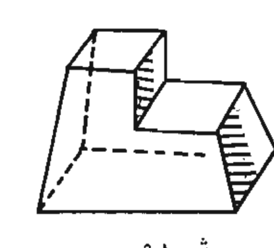


ش ۹۵

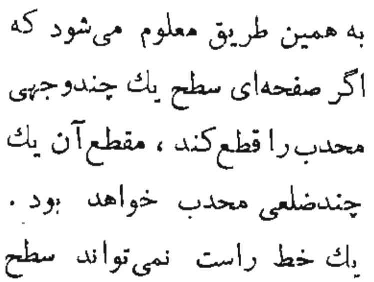
۱۲۲ ـ چندوجهی محدب ـ چندوجهی را **محدب** نامندهرگاه بتمامی در يك طرف صفحهٔ هريك از وجوه خود قرارگیرد (شکل ۹۰) .

جمیع وجوه هر چندوجهی محدب ، چندضلعیهای محدب هستند .

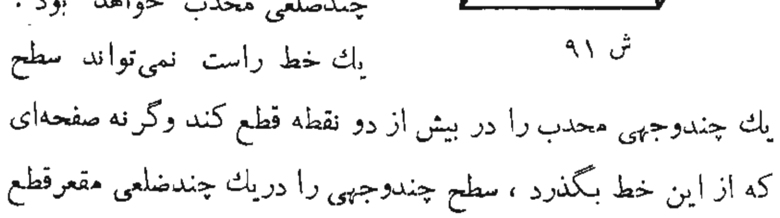
زیرا مثلا اگر در شکل ۹۰ یال AB را که متعلق به دو وجه P و P' می‌باشد در نظر بگیریم ، چون این چندوجهی در يك طرف صفحهٔ P واقع است ، چندضلعی P' در يك طرف خط AB واقع می‌باشد و این استدلال را برای جمیع یالهای جسم می‌توان تکرار کرد .



ش ۹۱



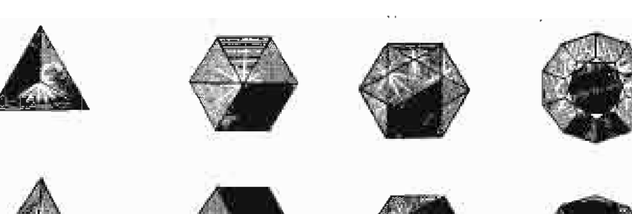
به همین طریق معلوم می‌شود که اگر صفحه‌ای سطح يك چندوجهی محدب را قطع‌کند ، مقطع‌آن يك چندضلعی محدب خواهد بود . يك خط راست نمی‌تواند سطح يك چندوجهی محدب را در بیش از دو نقطه قطع کند وگرنه صفحه‌ای که از این خط بگذرد ، سطح چندوجهی را دريك چندضلعی مقعرقطع خواهد کرد و این ممکن نیست .



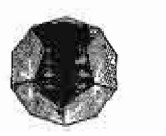
در صورتی که چندوجهی محدب نباشد ، آن را **مقعر** می‌نامند (شکل۹۱) .

۱۲۳ ـ چندوجهی منتظم محدب ـ يك چندوجهی محدب را که جمیع وجوهش چندضلعیهای منتظم متساوی وجمیع فرجه‌هایش‌متساوی باشند ، چندوجهی منتظم محدب می‌نامند .

۱۲۴ ـ قضیه ـ بیش از پنج نوع چندوجهی منتظم محدب وجود ندارد .









ش ۹۲

وجوه يك چندوجهی منتظم محدب ممکن‌است مثلثهای متساوی ـ الاضلاع یا مربع یا پنج‌ضلعی منتظم محدب وغیره باشند .

عدهٔ وجوهی راکه دريك رأس باهم مشترکند (ویکی از کنجهای جسم را پدید می‌آورند) ، n می‌نامیم ؛ می‌دانیم که مجموع زوایای هر کنج چندوجهی محدب ازچهارقائمه کمتراست و نیز خاطرنشان می‌کنیم که اندازهٔ هريك از زوایای يك Nضلعی منتظم محدب ، مساوی است با $\frac{2N-4}{N}$ قائمه .

اولاـ اگروجوه جسم‌مثلثهای متساوی‌الاضلاع باشند ، باید داشته باشیم $n\times 60° < 360°$ و بنابراین n از ۶کوچکتراست وفقط می‌تواند مقادیر ۳ و ۴ و ۵ را داشته باشد ؛ پس چندوجهیهای منتظم محدبی که وجوهشان مثلثهای متساوی‌الاضلاع باشند سه نوع بیشتر نیستند : هر يك از کنجهای آن یا سه‌وجهی یا چهاروجهی یا پنج‌وجهی هستند .

[ثابت می‌کنند که نظیر هر يك از مقادیر ۳ ، ۴ و ۵ که به n نسبت داده شود ، يك چندوجهی منتظم محدب وجود دارد که وجوهش

مثلثهای متساوی‌الاضلاع می‌باشند و عبارتند از : **چهار وجهی منتظم محدب** (n = ۳) و هشت‌وجهی منتظم محدب (n=۴) و بیست‌وجهی منتظم محدب (n=۵)] .

ثانیاً ـ اگر وجوه جسم مربع باشند ، باید داشته باشیم :
$n \times 90^\circ < 360^\circ$ و بنابراین n از ۴ کوچکتر است وفقط می‌تواند مقدار ۳ را داشته باشد .

[ثابت می‌کنندکه نظیرمقدار n=۳ یك چندوجهی منتظم محدب وجود دارد که وجوهش مربع می‌باشند و آن عبارت است از مکعب یعنی شش‌وجهی منتظم محدب] .

ثالثاً ـ اگروجوه جسم پنج‌ضلعیهای منتظم محدب باشند ، باید داشته باشیم $n \times 108^\circ < 360^\circ$ و بنابراین n فقط می‌تواند مقدار ۳ را داشته باشد .

[ثابت می‌کنندکه نظیرمقدار n=۳ یك چندوجهی منتظم‌محدب وجود دارد که وجوهش پنج‌ضلعی منتظم محدب باشد وآن عبارت است از دوازده وجهی منتظم محدب] .

رابعاً ـ اگروجوه جسم شش ضلعیهای منتظم محدب باشند ، باید داشته باشیم $n \times 120^\circ < 360^\circ$ یعنی باید n کوچکتر از ۳ باشد و این ممکن‌نیست و به همین طریق چندوجهیهای منتظم محدبی وجود ندارند که وجوه آنها چندضلعیهای منتظم محدب دیگر (ازشش ضلعی به‌بالا) باشند .

بنابراین فقط پنج نوع چندوجهی منتظم محدب وجود دارد که درسه نوع‌آن ، وجوه ، مثلث متساوی‌الاضلاع ودر یك نوع‌آن ، وجوه ،

مربع و در یك نوع آن ، وجوه ، پنج‌ضلعی منتظم محدب می‌باشند .

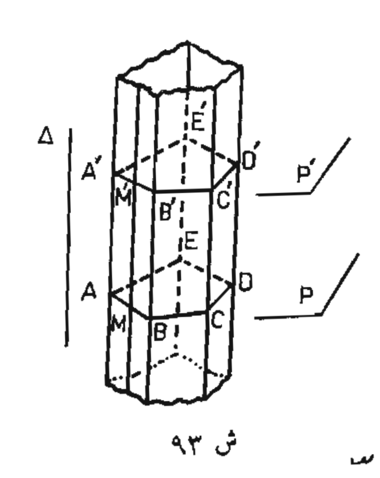
در جدول زیر ، اجزای مختلف چندوجهیهای منتظم محدب ثبت شده است :

جسم	عدهٔ اضلاع هر وجه	عدهٔ یالهای هر کنج	عدهٔ رأسهای جسم	عدهٔ یالهای جسم
چهاروجهی	۳	۳	۴	۶
هشت وجهی	۳	۴	۶	۱۲
بیست وجهی	۳	۵	۱۲	۳۰
مکعب	۴	۳	۸	۱۲
دوازده وجهی	۵	۳	۲۰	۳۰

۲ ـ منشور

مهم **۱۲۵ ـ سطح منشوری** ـ هرگاه خط راستی مانند MM' در فضا چنان تغییرمکان دهدکه همواره‌با خط راست ثابتی مانند Δ موازی باشد و بر چندضلعی مسطحی مانند ABCDE که صفحه‌اش با خط Δ موازی نیست متکی بماند، از حرکت‌آن ، سطح نامحدودی ایجاد می‌شود که آن را سطح منشوری می‌نامند (شکل۹۳) .

خط راست MM' را **مولد** و مواضعی از آن را که از رأسهای چندضلعی مزبور می‌گذرند یعنی خطوط راست AA' ، BB' و ... را



ش ۹۳

یالهای سطح منشوری می‌نامند. قسمتهای مسطحی از سطح منشوری را که هریك مابین دو یال متوالی مانند AA' و BB' واقعند **وجوه** سطح مزبور می‌گویند؛ (شکل ۹۳) یك سطح منشوری پنج‌وجهی را نشان می‌دهد.

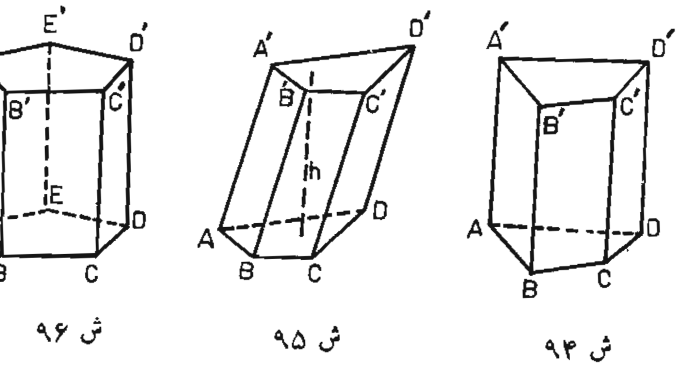
۱۲۶ - قضیه - فصل‌مشترکهای هرسطح‌منشوری بادوصفحهٔ متوازی که با یالهای آن موازی نباشند، دو چندضلعی متساویند.

فرض می‌کنیم دوصفحهٔ متوازی P و P' سطح منشوری S راقطع کرده باشند و فصل مشترکهای آنها را با سطح منشوری دو چندضلعی $ABCDE$ و $A'B'C'D'E'$ می‌نامیم (شکل ۹۳). قطعه‌خطهای AB و $A'B'$ که فصل مشترکهای دو صفحهٔ متوازی P و P' با صفحهٔ وجه $AA'B'B$ هستند، متوازیند؛ پس شکل $ABB'A'$ متوازی‌الاضلاع است و $AB=A'B'$. به همین دلیل هر ضلع از چند ضلعی $ABCDE$ و ضلعی از چند ضلعی $A'B'C'D'E'$ که با آن در یك وجه واقع است‌هم متساویند وهم متوازی. حال اگر صفحهٔ P' را طوری حرکت دهیم‌که نقطهٔ A' روی یال AA' به طرف A حرکت‌کند وضلع $A'B'$ همواره با AB وضلع $A'E'$ همواره با AE موازی باشد، صفحهٔ P' ضمن تغییر مکان موازی باخودش می‌ماند و واضح است‌که وقتی نقطهٔ

A' بر نقطهٔ A منطبق شود صفحهٔ P' بر P و نقاط B'، C'، D' و E' بترتیب بر نقاط B، C، D و E منطبق خواهند شد، یعنی چندضلعیهای مذکور با هم مساویند.

اگر صفحه‌ای مانند P جمیع یالهای یك سطح منشوری را قطع کند (شکل ۹۳)، چندضلعی مسطح $ABCDE$ را که به این طریق حاصل می‌شود **مقطع صفحهٔ P در سطح منشوری** می‌نامند.

۱۲۷ - منشور - منشور جسمی است که به یك سطح منشوری ودو مقطع مسطح متوازی از آن محدود باشد (شکل ۹۴). این دو مقطع مسطح راکه نظربه قضیهٔ ۱۲۶ باهم مساوی می‌باشند، **دوقاعدهٔ منشور** و قسمتی از سطح منشور را که بین دوقاعدهٔ آن واقع است، **سطح جانبی منشور** می‌نامند. یالهایی از سطح جسم که در صفحات دو قاعده واقع



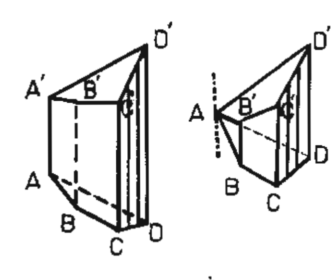
ش ۹۴ ش ۹۵ ش ۹۶

نیستند، **یالهای جانبی منشور** نامیده می‌شوند. یالهای‌جانبی‌منشورهمه باهم مساوی هستند و وجوه جانبی منشور همه متوازی‌الاضلاعند (شمارهٔ ۳۵). فاصلهٔ صفحات دو قاعده را **ارتفاع** منشور می‌گویند. بر حسب آنکه قاعدهٔ منشور مثلث یا چهارضلعی یا پنج‌ضلعی و غیره باشد، آن را منشور سه‌پهلو یا چهار پهلو یا پنج‌پهلو و غیره می‌نامند.

۱۲۸ ـ منشور قائم ـ منشور قائم منشوری است که یالهای جانبی آن بر صفحات دو قاعده‌اش عمود باشند (شکل ۹۴) . هر یك از وجوه جانبی منشور قائم یك مستطیل است و طول ارتفاع منشور قائم با طول هر یك از یالهای جانبی آن مساوی است . منشوری را که قائم نباشد ، **منشور مایل** می‌نامند (شکل۹۵) .

۱۲۹ ـ منشورمنتظم ـ منشور منتظم منشور قائمی است‌که قاعدهٔ آن ، چندضلعی منتظم باشد (شکل ۹۶) . وجوه جانبی منشور منتظم ، مستطیلهای متساوی می‌باشند . خاطر نشان می‌کنیم که یك منشورمنتظم ، عموماً یك چندوجهی منتظم نیست .

۱۳۰ ـ منشور ناقص ـ منشور ناقص جسمی است که به یك سطح منشوری و دو مقطع مسطح غیرمتوازی آن محدود باشد (شکل۹۷). این دو مقطع را قاعده‌های منشور ناقص می‌گویند . وجوه‌جانبی منشور ناقص، ذوزنقه وگاهی نیز مثلث می‌باشند . همچنین ممکن است یك مستطیل یا یك متوازی‌الاضلاع داشته باشد . اگر صفحهٔ یکی از دو قاعدهٔ منشور ناقص بریالهای جانبی آن عمود باشد ، منشور ناقص را قائم می‌گویند .



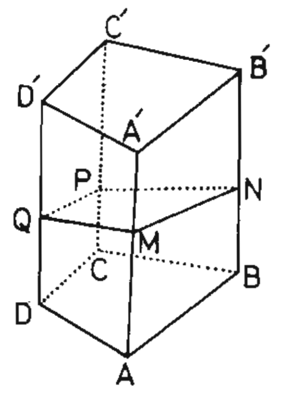
ش ۹۷

۱۳۱ ـ مقطع قائم منشور ـ گفتیم که منشور جسمی است که به یك سطح منشوری و دو مقطع مسطح متوازی از آن محدود باشد . هرگاه این‌سطح منشوری را که برای تعریف منشور بکارمی‌رود ، به‌وسیلهٔ صفحه‌ای که بریالهای آن عمود باشد قطع‌کنیم، چندضلعی مسطح حاصل را **مقطع قائم منشور** می‌گویند . مثلا چندضلعی MNPQ مقطع قائم

منشور شکل ۹۸ می‌باشد. در منشور قائم دوقاعده مقطعهای قائم هستند.

۱۳۲ ـ قضیه ـ مساحت سطح جانبی منشور مایل مساوی است با حاصل ضرب محیط مقطع قائم در طول یال جانبی آن.

جمیع وجوه‌جانبی‌متوازی‌الاضلاعهایی هستندکه قاعدهٔ آنها یال جانبی جسم و ارتفاع هریك‌از آنها یکی از اضلاع مقطع قائم می‌باشد (شکل ۹۸) . پس اگر مساحت سطح جانبی را S و طول یال جانبی را a بنامیم :

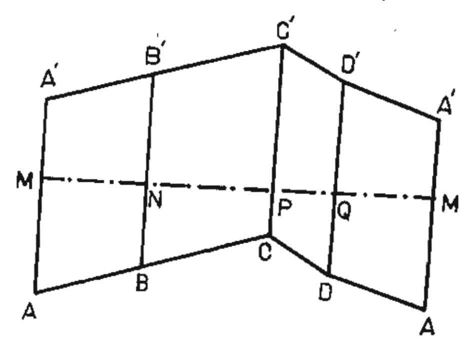


ش ۹۸

$$S=(MN+NP+PQ+QM)\times a$$

۱۳۳ ـ نتیجه ـ مساحت سطح جانبی منشور قائم مساوی است با حاصل‌ضرب محیط قاعدهٔ آن در ارتفاعش .

زیرا اگر منشور قائم باشد (شکل۹۴) ، قاعدهٔ آن مقطع‌قائم آن است و طول یال جانبی آن مساوی با ارتفاعش می‌باشد .

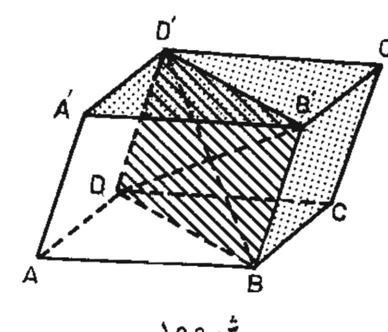


(گسترش سطح جانبی منشور)
ش ۹۹

۱۳۴ ـ تبصره ـ برای بدست آوردن سطح کل منشور باید مجموع مساحات دو قاعده را بر مساحت سطح جانبی آن افزود .

۴ ـ متوازی‌السطوح

۱۳۵ ـ تعریف ـ متوازی‌السطوح منشوری است که قاعده‌هایش متوازی‌الاضلاع باشند . اگر متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر بگیریم و از رأسهای آن چهار قطعه‌خط AA′ ، BB′ ، CC′ و DD′ را در یك طرف صفحهٔ متوازی‌الاضلاع طوری اختیار کنیم که هم متساوی و هم متوازی باشند و متوازی‌الاضلاع A′B′C′D′ را تکمیل کنیم ، متوازی‌السطوح ABCDA′B′C′D′ بدست می‌آید . هر متوازی‌السطوح دارای شش وجه و هشت رأس و دوازده یال و چهار قطر می‌باشد (شکل ۱۰۰) . هر دو وجه را که رأس مشترك نداشته باشند ، وجوه متقابل می‌گویند .



ش ۱۰۰

۱۳۶ ـ قضیه ـ در هر متوازی‌السطوح :

اولاً ـ **یالها ، چهار بچهار متساوی و متوازیند .**

ثانیاً ـ **وجه‌های متقابل ، متوازی‌الاضلاعهای متساوی هستند و صفحاتشان با هم موازی است .**

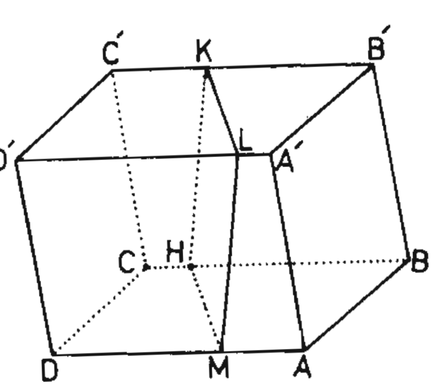
ثالثاً ـ **چهارقطر ، ازیك نقطه‌که در وسط هر یك از آنها واقع است می‌گذرند .**

اولا ـ چون هر متوازی‌السطوح یك منشوراست و وجه‌های جانبی آن متوازی‌الاضلاع می‌باشند و قاعده‌هایش‌هم ، نظر به‌تعریف، متوازی‌الاضلاعند ، هر یك از شش‌وجه هر متوازی السطوح یك متوازی‌الاضلاع می‌باشد و بنابراین مثلاً چهار یال A′B′ و AB و D′C′ و DC با هم موازی و مساوی می‌باشند (شکل ۱۰۰) . ثانیاً از استدلال‌فوق‌نتیجه می‌شودکه صفحات دو وجه متقابل ، مانند ABB′A′ و DCC′D′ ، با هم موازی‌می‌باشند؛ زیرا دوخط متقاطع ازصفحهٔ‌اول مانند AB و AA′ با دو خط متقاطع از صفحهٔ دوم‌مانند DC و DD′ موازیند ؛ و گذشته ازاین ، دومتوازی‌الاضلاع مزبور ، با هم مساویند ؛ زیرا این دو متوازی‌الاضلاع را می‌توان مقاطع یك سطح منشوری با دو صفحهٔ متوازی دانست . هر دو وجه متقابل از یك متوازی السطوح را می‌توان دو قاعدهٔ آن اختیار کرد .

ثالثاً ـ در متوازی‌السطوح ABCDA′B′C′D′ (شکل ۱۰۰) دوقطر BD′ و B′D را درنظر می‌گیریم ؛ چهار ضلعی BDD′B′ متوازی‌الاضلاع است ؛ زیرا BB′ و DD′ هم متساویند و هم متوازی ؛ پس دو قطر این متوازی‌الاضلاع یعنی BD′ و B′D یکدیگر را در نقطه‌ای که در وسط هر یك از آنهاست قطع می‌کنند . حال اگر این استدلال را در بارهٔ دو قطر BD′ و AC′ تکرارکنیم ، معلوم‌می‌شودکه AC′ و همچنین A′C نیز از وسط BD′ می‌گذرند .

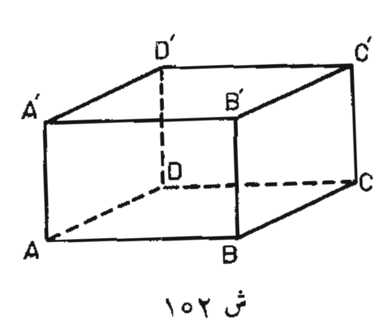
۱۳۷ـ نتیجه ـ اگر صفحه‌ای چهاریال متوازی یك متوازی ـ

السطوح راقطع کند ، مقطع آن یك متوازی‌الاضلاع است (شکل ۱۰۱) .



ش ۱۰۱

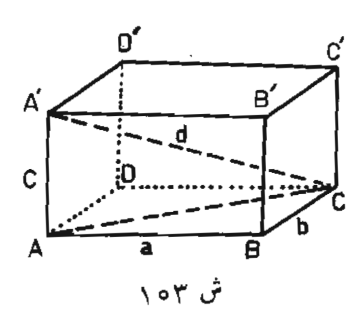
۱۳۸ـ متوازی‌السطوح قائم ـ **متوازی‌السطوح قائم، متوازی‌السطوحی است که چهار یال متوازی آن بر صفحات دو وجهی که شامل آن چهار یال نیستند ، عمودباشند** (شکل ۱۰۲) .



ش ۱۰۲

بنابراین هریك ازوجوه جانبی متوازی السطوح قائم، یك مستطیل و دو قاعدهٔ آن متوازی الاضلاع می‌باشند .

۱۳۹ـ مکعب مستطیل ـ **مکعب‌مستطیل، متوازی‌السطوح‌قائمی است‌که قاعده‌هایش مستطیل یامربع باشند** (شکل ۱۰۳) .



ش ۱۰۳

بنابراین شش وجه مکعب مستطیل ، مربع مستطیل هستند یا

آنکه چهار مربع مستطیل و دو مربع می‌باشند . اگر طولهای سه یال‌که دریك رأس مشترکند در دست باشد، مکعب مستطیل‌کاملا مشخص است. این سه طول را **سه بعد** مکعب مستطیل می‌نامند .

اگر سه بعد یك مکعب مستطیل با سه بعد یك مکعب مستطیل دیگر مساوی باشند ، آن دو مکعب مستطیل متساویند .

اگر صفحه‌ای به موازات یکی از وجوه مکعب مستطیل رسم شود و یالهای عمود بر آن وجه را قطع کند ، مکعب مستطیل به دو مکعب مستطیل دیگر تقسیم می‌شود ؛ برعکس ، اگر دو مکعب مستطیل دارای یك وجه متساوی باشند ، می‌توان آنها را طوری پهلوی یکدیگر قرار داد که از مجموعهٔ آنها یك مکعب مستطیل جدید پدید آید .

۱۴۰ ـ قضیه ـ اولا اقطار هر مکعب مستطیل متساویند . ثانیاً مربع طول هرقطرمکعب مستطیل مساوی است با مجموع مربعات سه بعدآن .

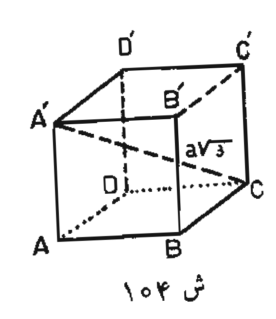
در شکل ۱۰۳ ، مثلث $A'AC$ قائم‌الزاویه است (شمارهٔ ۳۹) و داریم : $\overline{A'C}^2=\overline{AA'}^2+\overline{AC}^2$ ؛ اما AC عبارت است از قطر مستطیل $ABCD$ ؛ پس $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AB}^2$ و بنا بر این $\overline{A'C}^2=\overline{AA'}^2+\overline{AD}^2+\overline{AB}^2$ و اگر طولهای AB ، AD و AA' را بترتیب a ، b و c و طول قطر $A'C$ را d بنامیم ، می‌توان نوشت :

$$d^2=a^2+b^2+c^2 \quad \text{یا} \quad d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

به همین طریق معلوم می‌شود که طول قطرهای AC' و BD' و DB' نیز مساوی $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ است و بنابراین چهار قطر مکعب مستطیل با هم مساوی می‌باشند .

۱۴۱ ـ مکعب ـ اگر ابعاد یك مکعب مستطیل همه با هم مساوی باشند ، جسم را مکعب می‌نامند (شکل ۱۰۴) .

اگر طول ضلع مکعب را a بنامیم، نظر به شمارهٔ ۱۴۰ طول هر قطر مکعب مساوی است با $a\sqrt{۳}$.



ش ۱۰۴

۴ ـ حجم متوازی‌السطوح ومنشور

۱۴۲ ـ واحد حجم ـ قبول می‌کنیم‌که حجم هر جسم‌کمیتی‌است اندازه پذیر .

حجم مکعبی را که یالش مساوی با واحد طول باشد ، واحد حجم اختیار می‌کنند .

در قضایایی که در بارهٔ اندازهٔ حجم اجسام بیان می‌کنیم ، دو قرارداد مهم زیر را همواره در نظر می‌گیریم* :

اولا جمیع طولها با یك واحد اندازه گرفته می‌شوند .

ثانیاً واحد سطح و واحد حجم بترتیب مربع و مکعبی هستند که ضلع آنها مساوی با واحد طول اختیار شود .

برای سهولت ، غالباً به جای آنکه بگوییم اندازهٔ حجم ، فقط به ذکر کلمهٔ حجم اکتفا می‌کنیم وهمانطورکه در هندسهٔ مسطحه‌گفته‌ایم،

* وگرنه باید حکم قضایای مزبور را به صورت مناسبی تغییر داد .

مقصود از حاصل‌ضرب دو یا چند قطعه‌خط ، حاصل‌ضرب اندازه‌های آنها بر حسب یك واحد خواهد بود .

۱۴۳ـ اجسام متعادل ـ اگر اندازهٔ حجمهای دو جسم با هم برابر باشند ، آن دو جسم را **متعادل** می‌نامند .

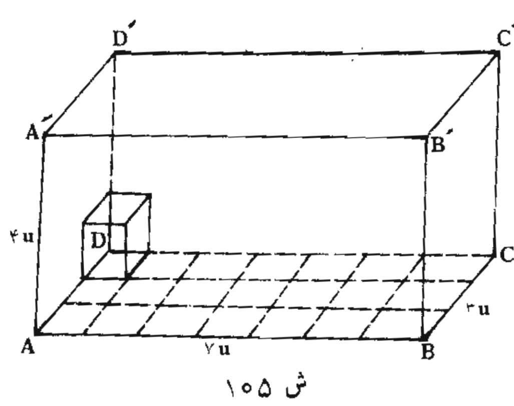
حجم مکعب مستطیل

۱۴۴ـ قضیه ـ حجم هر مکعب مستطیل مساوی است با حاصل‌ضرب سه بعد آن .

این قضیه را در دو حالت زیر ثابت می‌کنیم :

حالت اول ـ اندازه‌های سه بعد مکعب مستطیل اعداد صحیح هستند .

فرض می‌کنیم که u واحد طول باشد و در مکعب مستطیل $ABCDA'B'C'D'$ داشته باشیم $AB=۷u$ و $AD=۳u$ و $AA'=۴u$ (شکل ۱۰۵) . می‌دانیم که سطح مستطیل ABCD را می‌توان به ۳×۷ مربع که ضلع هریك از آنها مساوی با u باشد تقسیم کرد .

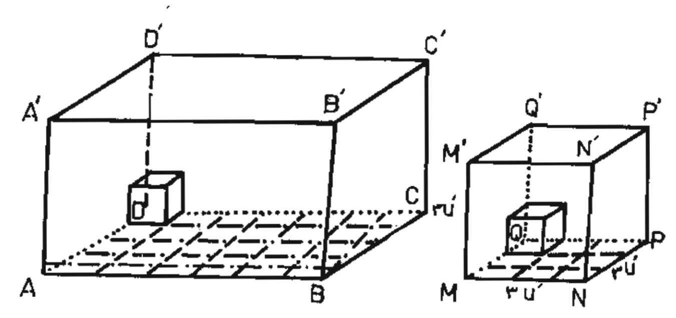


ش ۱۰۵

روی هریك ازاین مربعها ودر داخل مکعب‌مستطیل می‌توان مکعبی که طول یالش u باشد بناکرد ؛ این ۲۱ مکعب‌که به این طریق حاصل می‌شوند ، یك مکعب مستطیل پدید می‌آورند که قاعده‌اش $ABCD$ و ارتفاعش مساوی با u یا $\frac{AA'}{۴}$ می‌باشد ؛ پس می‌توان چهار مکعب مستطیل راکه با مکعب مستطیل مزبور مساوی باشند روی هم قرار داد تا از اجتماع آنها مکعب مستطیل $ABCDA'B'C'D'$ حاصل شود و به این‌طریق معلوم می‌شودکه مکعب مستطیل مفروض شامل ۴×۳×۷ مکعب است که هر یك از آنها مساوی با واحد حجم می‌باشند ، پس حجم‌مکعب مستطیل مفروض مساوی است با ۴×۳×۷ یعنی حاصل ضرب سه بعد آن .

حالت دوم ـ اندازهٔ سه‌بعد جسم (یا برخی از آنها) کسرهستند؛ (این‌کسرها را به‌یك مخرج تحویل می‌کنیم) .

مثلا مکعب مستطیل $ABCDA'B'C'D'$ (شکل ۱۰۶) را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که داشته باشیم : $AB=\frac{۷}{۳}u$ و



ش ۱۰۶

$AD=\frac{۵}{۳}u$ و $AA'=\frac{۴}{۳}u$ و واحد حجم یعنی مکعب $MNPQM'N'P'Q'$ را که یالش مساوی با واحد طول یعنی u است نیز در نظر می‌گیریم و $\frac{۱}{۳}$ واحد طول را u' می‌نامیم در این صورت داریم :

$$AA'=۴u' \qquad AD=۵u' \qquad AB=۷u'$$
$$MN=NP=MM'=۳u'$$

از استدلالی که در حالت اول شرح دادیم ، معلوم می‌شود که مکعب مستطیل مفروض شامل ۴×۵×۷ مکعب است که طول یال هر یك از آنها مساوی با u' می‌باشد و واحد حجم یعنی مکعب $MNPQM'N'P'Q'$ شامل ۳×۳×۳ ازهمان مکعبهاست . بنابراین نسبت حجم مکعب مستطیل $ABCDA'B'C'D'$ به واحد حجم مساوی است با $\frac{۷×۵×۴}{۳×۳×۳}$ ؛ به عبارت دیگر ، حجم مکعب مستطیل مفروض مساوی است با $\frac{۴}{۳}×\frac{۵}{۳}×\frac{۷}{۳}$ یعنی حاصل ضرب سه بعد آن .

اگر سه بُعد مکعب مستطیل را a ، b و c و حجم آن را V بنامیم ، داریم :

$$\boxed{V=a\cdot b\cdot c}$$

۱۴۵ ـ نتیجه ـ اولا چون حاصل ضرب دو بعد b و c از یك مکعب مستطیل ، مساوی است با مساحت سطح یکی از وجوه‌آن وهمان وجه را می‌توان قاعدهٔ جسم اختیار کرد ، در این صورت ارتفاع آن

مساوی با بعد a خواهد بود ، پس می‌توان گفت :

حجم مکعب مستطیل مساوی است با حاصل‌ضرب مساحت قاعدهٔ آن در ارتفاعش .

ثانیاً اگر سه بعد a ، b و c با هم مساوی باشند ، جسم مکعب است و حجم آن مساوی است با a^3 به عبارت دیگر :

حجم مکعب مساوی است با قوهٔ سوم طول یکی از یالهایش

به‌همین مناسبت است که قوهٔ سوم هر عدد را مکعب آن عدد می‌نامند .

حجم منشور قائم

۱۴۶ ـ قضیه ـ حجم هر منشور قائم مساوی است با حاصل‌ضرب مساحت قاعدهٔ آن در ارتفاعش .

برای اثبات این قضیه سه حالت تمیز می‌دهیم :

حالت اول ـ قاعدهٔ منشور مثلثی است قائم‌الزاویه .

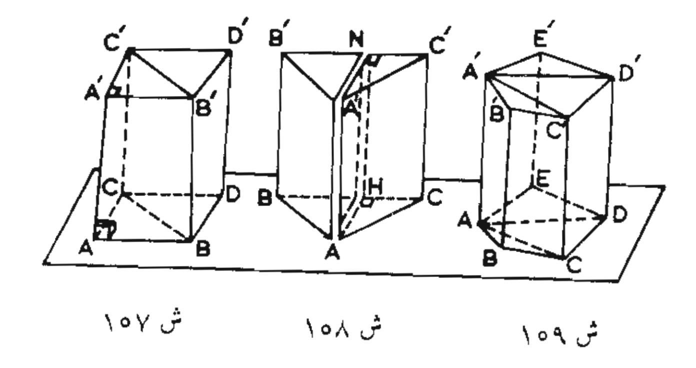
منشور قائم و سه پهلوی $ABCA'B'C'$ (شکل ۱۰۷) را که قاعده‌اش مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) است در نظر می‌گیریم و از یالهای BB' و CC' دو صفحه بترتیب به‌موازات وجوه مقابل آنها یعنی $ACC'A'$ و $ABB'A'$ می‌گذرانیم . این دو صفحه و صفحهٔ $BCC'B'$ و صفحات دو قاعدهٔ منشور مفروض یك منشور سه پهلوی قائم جدید $BCDB'C'D'$ را پدید می‌آورند و واضح است که از اجتماع این منشور با منشور مفروض یك مکعب مستطیل بوجود می‌آید .

دو مثلث ABC و DCB با هم مساویند و می‌توانیم یکی از آنها را در صفحهٔ مشترکشان بلغزانیم تا بردیگری منطبق شود و به این

ترتیب دو منشور سه‌پهلوی مذکور برهم منطبق می‌شوند و حجم هر یك از آنها مساوی است با نصف حجم مکعب مستطیل $ABDCA'B'D'C'$ یعنی مساوی است با :

$$(\text{مساحت } ABC)\times AA'=(\tfrac{1}{2}\ \text{مساحت } ABDC)\times AA'$$

پس حجم منشور $ABCA'B'C'$ مساوی است با حاصل ضرب مساحت قاعدهٔ آن در ارتفاعش .



ش ۱۰۷ ش ۱۰۸ ش ۱۰۹

حالت دوم ـ قاعدهٔ منشور مثلثی است غیرمشخص .

فرض می‌کنیم که BC بزرگترین ضلع* قاعدهٔ ABC از منشور سه‌پهلوی قائم $ABCA'B'C'$ باشد (شکل۱۰۸) . نقطهٔ H پای ارتفاع AH روی ضلع BC مابین B و C واقع است و منشور مفروض عبارت است از مجموع دو منشور سه‌پهلوی قائم که قاعده‌های آنها مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AHB و AHC و ارتفاع مشترکشان برابر AA' است و اگر حجم منشور مفروض را V بنامیم ، داریم :

* اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد ، هر ضلع آن را که اختیار کنیم استدلال صحیح خواهد بود .

$$V=(\text{AHC مساحت})\times AA'+(\text{AHB مساحت})\times AA'$$
$$=(\text{ABC مساحت})\times AA'$$

و قضیه در این حالت نیز ثابت است .

حالت سوم ـ قاعدهٔ منشور یك چند ضلعی است .

فرض می‌کنیم‌که قاعدهٔ منشور پنج‌ضلعی محدب ABCDE باشد (شکل ۱۰۹). صفحاتی‌که از یال AA' و بترتیب از رأسهای C و D می‌گذرند ، منشور را به سه منشور سه پهلوی قائم تجزیه می‌کنند که قاعدهٔ آنها سه مثلث ABC و ACD و ADE و ارتفاع همهٔ آنها AA' است . چون حجم سه منشور مزبور را بترتیب v_1 ، v_2 و v_3 و طول AA' را h بنامیم ، داریم :

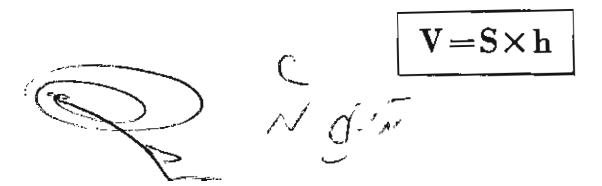
$$v_1=(\text{ABC مساحت})\times h$$
$$v_2=(\text{ACD مساحت})\times h$$
$$v_3=(\text{ADE مساحت})\times h$$

و چون این سه رابطه را عضو بعضو باهم جمع کنیم وحجم منشور مفروض را V بنامیم ، حاصل می‌شود :

$$V=(\text{ABCDE مساحت})\times h$$

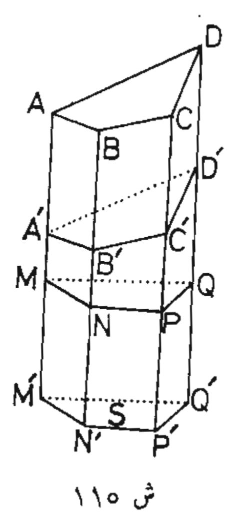
در حالتی که چندضلعی قاعده محدب نباشد ، استدلال قضیه شبیه به همین است و در هر حالت چون ارتفاع منشور را h و مساحت قاعدهٔ آن را S و حجم آن را V بنامیم ، دستورکلی زیر بدست می‌آید :

$$\boxed{V=S\times h}$$



حجم منشور مایل

۱۴۷ ـ قضیه ـ حجم هر منشور مایل مساوی است با حاصل‌ضرب مساحت مقطع قائم آن در طول یال جانبیش .



ش ۱۱۰

منشور مایل $ABCDA'B'C'D'$ را در نظر می‌گیریم و سطح جانبی آن را امتداد می‌دهیم (شکل ۱۱۰) . بدین ترتیب یك سطح منشوری حاصل می‌شود ، حال روی خط راست AA' قطعه خط MM' را مساوی با قطعه خط AA' طوری اختیار می‌کنیم که اگر از نقاط M و M' دو صفحه بر خط راست AA' عمودکنیم ، مقطعهای قائم سطح منشوری مزبورکه به این طریق بدست می‌آیند با منشور مفروض نقطهٔ مشترك نداشته باشند ؛ نظر به قضیهٔ ۱۲۶ این دو مقطع قائم یعنی چند ضلعیهای MNPQ و $M'N'P'Q'$ با هم مساویند .

دومنشور ناقص ABCDMNPQ و $A'B'C'D'M'N'P'Q'$ را می‌توان بر هم منطبق کرد و برای این کار کافی است که منشور ناقص اول را تغییرمکان دهیم بقسمی‌که چندضلعی MNPQ بر چندضلعی $M'N'P'Q'$ منطبق شود * ودوجسم دریك طرف صفحهٔ $M'N'P'Q'$

* نقطهٔ M برنقطهٔ M' ونقطهٔ N برنقطهٔ N' و . . . واقع می‌شود.

قرارگیرند . در این صورت یال MA که عمود بر صفحهٔ $MNPQ$ می‌باشد ، بر خط راست $M'A'$ منطبق می‌شود وچون $M'A'=MA$، نقطهٔ A بر نقطهٔ A' قرار می‌گیرد ؛ به همین طریق معلوم می‌شود که رأسهای B ، C و D نیز بترتیب بر رأسهای B' ، C' و D' منطبق می‌شوند و بنابراین دو منشور ناقص مزبور متساویند .

چون این دو منشور ناقص متساوی دارای یك قسمت مشترك هستند که عبارت است از منشور ناقص قائم $MNPQA'B'C'D'$ ، اگر این قسمت مشترك را از آنها حذف کنیم ، دو قسمتی که باقی می‌مانند، یعنی دومنشور $MNPQM'N'P'Q'$ و $ABCDA'B'C'D'$ ، حجمشان با هم مساوی است . اما نظر به قضیهٔ ۱۴۶ داریم :

$$MNPQM'N'P'Q' \text{ حجم منشور قائم} = (\text{مساحت } MNPQ) \times MM'$$

و با ملاحظهٔ اینکه $MM'=AA'$ می‌توان نوشت :

$$ABCDA'B'C'D' \text{ حجم منشور مایل} = (\text{مساحت } MNPQ) \times AA'$$

و از آنجا $\boxed{V=S\times a}$ که در آن :

$V=$ حجم منشور مایل

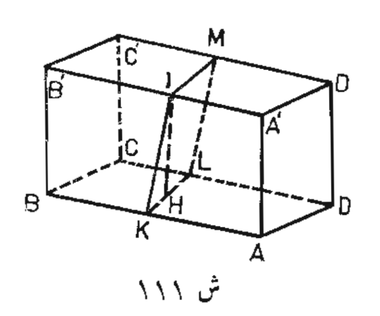
$S=$ مساحت مقطع قائم

$a=$ طول یال جانبی

۱۴۸ـ قضیه ـ حجم هر متوازی‌السطوح مساوی است با حاصل ضرب مساحت قاعدهٔ آن درارتفاعش .

متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$ (شکل ۱۱۱) را که قاعده‌اش متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است * ، می‌توان منشورمایلی دانست

* هر وجه از متوازی‌السطوح را می‌توان قاعدهٔ آن دانست و چون وجوه متقابل متساویند ، عموماً برای یك متوازی‌السطوح سه قاعدهٔ مختلف می‌توان اختیار کردکه ارتفاعهای نظیر آنها نیز با هم مختلفند .



ش ۱۱۱

که قاعدهٔ آن متوازی‌الاضلاع $ADD'A'$ و یال جانبیش AB باشد و چون در این منشور مایل مقطع قائم $IKLM$ را عمود بر یال AB رسم کنیم و از I عمود IH را بر صفحهٔ $ABCD$ فرود آوریم ، این عمود در صفحهٔ مقطع قائم که بر صفحهٔ $ABCD$ عمود است واقع می‌شود (شمارهٔ ۸۱) ، پس مقطع قائم که یك متوازی‌الاضلاع است مساحتش مساوی است با $KL\times IH$ و نظر به قضیهٔ ۱۴۷ حجم متوازی‌السطوح مفروض که آن را V می‌نامیم ، عبارت است از :

$$V=(KL\times IH)\times AB=(AB\times KL)\times IH$$

اما $(AB\times KL)$ مساوی است با مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ (قاعدهٔ متوازی‌السطوح) و IH عبارت است ازارتفاع متوازی‌السطوح ؛ پس اگر مساحت قاعدهٔ $ABCD$ را S و طول ارتفاع IH را h بنامیم ، داریم :

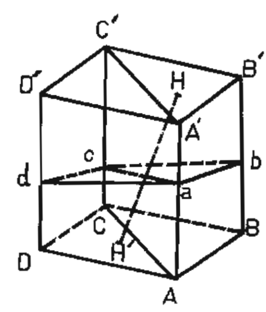
$$\boxed{V=S\times h}$$

۱۴۹ ـ قضیه ـ حجم هرمنشور مساوی است با حاصل‌ضرب مساحت قاعدهٔ آن در ارتفاعش .

برای اثبات این قضیه دو حالت تمیز می‌دهیم :

حالت اول ـ منشور سه پهلوی $ABCA'B'C'$ را در نظر می‌گیریم ودرصفحهٔ مثلث ABC متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را می‌سازیم

(شکل۱۱۲) ؛ سپس متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$ را تکمیل کرده و مقطع‌قائم abcd را عمود بر یال AA' در این متوازی‌السطوح رسم می‌کنیم ؛ این مقطع قائم یك متوازی‌الاضلاع است . صفحهٔ $ACC'A'$ متوازی‌السطوح را به دو منشور سه‌پهلو و متوازی‌الاضلاع abcd را به دو مثلث متساوی تجزیه می‌کند . چون در دو منشور سه پهلوی $ABCA'B'C'$ و $ACDA'C'D'$ مقطعهای قائم abc و adc متساویند وطول یالهای جانبی این دو منشور یکی است ، پس نظر به قضیهٔ ۱۴۷ حجم این دو منشور با هم مساوی است و حجم هر یك از آنها نصف حجم متوازی‌السطوح است .



ش ۱۱۲

اگرحجم منشور $ABCA'B'C'$ را V ومساحت قاعدهٔ آن یعنی مساحت مثلث ABC را S و ارتفاع مشترك منشور و متوازی‌السطوح یعنی طول HH' را h بنامیم ، حجم متوازی‌السطوح ۲V و مساحت قاعدهٔ آن ، یعنی مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD مساوی با ۲S می‌شود . نظر به قضیهٔ ۱۴۸ داریم $2V=2S\times h$

و از آنجا

$$\boxed{V=S\times b}$$

مهم **حالت دوم** ـ اکنون منشور مایل $ABCDEA'B'C'D'E'$ (شکل ۱۱۳) را در نظر می‌گیریم و به وسیلهٔ صفحات $AA'C'C$ و $AA'D'D$ آن را به منشورهای سه پهلو تجزیه می‌کنیم . ارتفاع این

منشورهای سه‌پهلو همان ارتفاع منشور مفروض است که آن را h فرض می‌کنیم . اگر حجم این منشورهای سه‌پهلو را v_1 و v_2 و v_3 وحجم منشور مفروض را V و مساحت قاعدهٔ آن را S بنامیم ، داریم :

ش ۱۱۳

$$v_1 = (\text{مساحت } ABC) \times h$$

$$v_2 = (\text{مساحت } ACD) \times h$$

$$v_3 = (\text{مساحت } ADE) \times h$$

وچون این تساویها را عضو بعضو باهم جمع‌کنیم ، نتیجه می‌شود:

$$\boxed{V=S\times h}$$

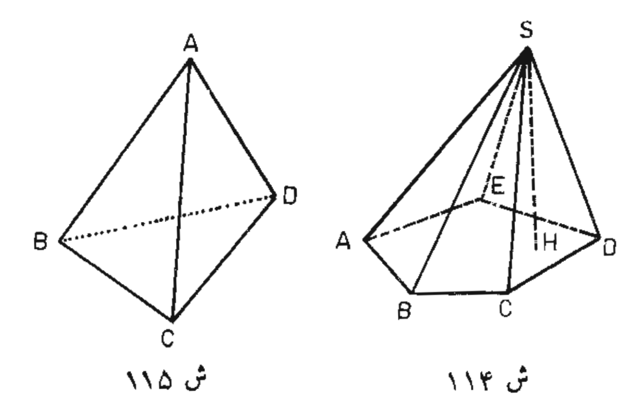
۱۵۰ ـ تبصره ـ قضیهٔ شمارهٔ ۱۴۹ بطور خلاصه مفهوم قضایای ۱۴۴ ، ۱۴۵ ، ۱۴۶ و ۱۴۸ را در بر دارد و ترتیبی که قضایای مزبور را یکی پس از دیگری شرح دادیم تا به قضیهٔ ۱۴۹ رسیدیم ، مثال جالب توجهی است از استنتاج یك حکم کلی بوسیلهٔ مطالعهٔ حالات خاص آن .

۵ ـ هرم

مهم **۱۵۱ ـ هرم ـ** چندضلعی مسطح ABCDE و نقطهٔ S را در خارج صفحهٔ آن در نظر می‌گیریم . جسمی را که به چندضلعی مسطح

ABCDE و مثلثهای SAB ، SBC ، SCD ، SDE و SEA محدود باشد هرم می‌نامند (شکل ۱۱۴) . چندضلعی مسطح ABCDE را **قاعدهٔ هرم** و بخصوص نقطهٔ S را **رأس هرم** و مثلثهای SAB و SBC و . . . را وجوه جانبی هرم و مجموعهٔ آنها را **سطح جانبی هرم** و قطعه خطهای SA و SB و . . . را **یالهای جانبی هرم** و فاصلهٔ رأس S را از صفحهٔ قاعدهٔ ABCDE **ارتفاع هرم** می‌گویند . بر حسب آنکه قاعدهٔ هرم ، مثلث یا چهارضلعی یا پنج‌ضلعی وغیره باشد، هرم را سه‌پهلو یا چهارپهلو یا پنج‌پهلو و غیره می‌نامند .

هرمی راکه قاعده‌اش مثلث باشد ، به‌جای هرم سه‌پهلو ، **چهار-**

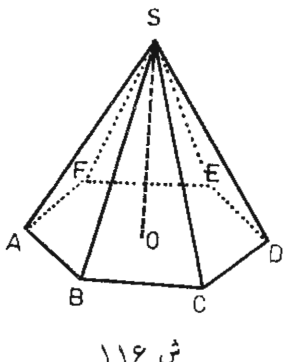


ش ۱۱۵ ش ۱۱۴

وجهی می‌گویند . همیشه وجوه یك چهار وجهی مثلث هستند و هر چهاروجهی را به چهار طریق مختلف می‌توان هرم سه‌پهلو انگاشت (شکل ۱۱۵) .

۱۵۲ - هرم منتظم - هرم منتظم هرمی است که قاعدهٔ آن یك چند ضلعی منتظم و تصویر رأس آن برصفحهٔ قاعده ، مرکز این چندضلعی منتظم باشد (شکل ۱۱۶) . هرم منتظم S.ABCDEF را در نظر

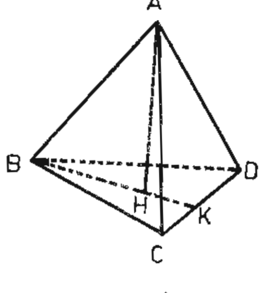
می‌گیریم و تصویر رأس S را بر صفحهٔ قاعده ، نقطهٔ O می‌نامیم . چون فواصل OA و OB و OC و ...



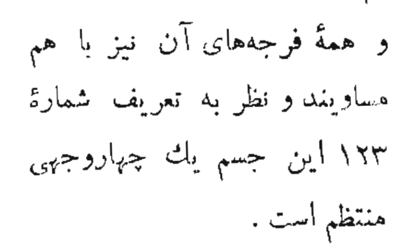
ش ۱۱۶

همه متساویند ، یالهای جانبی SA و SB و SC و ... مایلهایی هستند که پایشان از پای عمود SO به یك فاصله است ، بنابراین با هم مساوی می‌باشند (شمارهٔ ۵۸) ؛ وجوه جانبی SAB و SBC و . . . مثلثهای متساوی‌الساقینی هستند که همه با هم مساویند (در حالت سه ضلع) . ارتفاع نظیر رأس S از هر یك از این مثلثهای متساوی را **سهم هرم منتظم** می‌گویند .

۱۵۳ - چهاروجهی منتظم - اگر شش یال یك چهاروجهی با هم مساوی باشند ، هریك از وجوه آن یك مثلث متساوی‌الاضلاع است . و همهٔ فرجه‌های آن نیز با هم مساویند و نظر به تعریف شمارهٔ ۱۲۳ این جسم یك چهاروجهی منتظم است .



ش ۱۱۷



حال اگر مثلا از رأس A عمود AH را بر صفحهٔ BCD فرود آوریم (شکل ۱۱۷) ، چون مایلهای AB ، AC و AD متساوی هستند ، پاهای آنها از پای عمود AH به یك فاصله‌اند ، یعنی HB=HC=HD و نقطهٔ H مرکزدایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع

BCD است؛ پس : چهاروجهی منتظم را به چهار طریق مختلف می‌توان هرم سه‌پهلوی منتظم انگاشت .

اگرطول یال چهاروجهی منتظم را a بنامیم ، درشکل ۱۱۷ داریم:

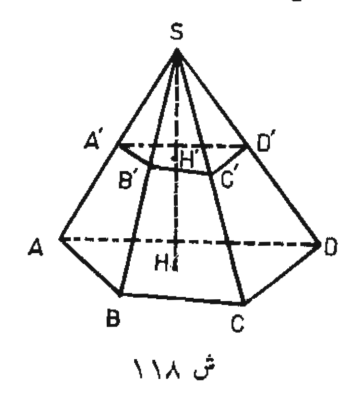
$BK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع) و $BH=\frac{a\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

(زیرا H نقطهٔ تلاقی سه میانهٔ مثلث BCD است) ودر مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB می‌توان نوشت :

$$\overline{AH}^2=\overline{AB}^2-\overline{BH}^2=a^2-\frac{3a^2}{9}=\frac{6a^2}{9}$$

و از آنجا $AH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ (ارتفاع چهاروجهی منتظم)

۱۵۴ ـ قضیه ـ اگر صفحه‌ای با قاعدهٔ یك هرم موازی باشد و یالهای جانبی آن را قطع کند ، نسبت مساحت سطح مقطع به مساحت قاعدهٔ هرم مساوی است با مربع نسبت فاصلهٔ رأس هرم از صفحهٔ مقطع به مربع ارتفاع هرم .



ش ۱۱۸

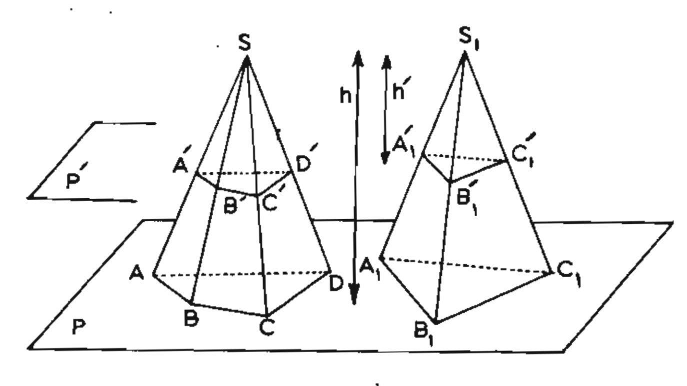
این همان قضیه‌ای است که در شمارهٔ ۱۲۵ از قضیهٔ شمارهٔ ۱۱۹ نتیجه گرفتیم . هرم $S.ABCD$ را درنظر می‌گیریم (شکل۱۱۸) . اگر مساحت مقطع $A'B'C'D'$ را b' و مساحت قاعدهٔ $ABCD$ را b وارتفاع‌هرم را SH و فصل مشترك این ارتفاع را با صفحهٔ مقطع نقطهٔ H' بنامیم ،

داریم :

$$\frac{b'}{b}=\frac{SH'^2}{SH^2}=\left(\frac{SH'}{SH}\right)^2$$

۱۵۵ ـ نتیجه ـ هرگاه دو هرم دارای قاعده‌های متعادل و ارتفاعهای متساوی باشند و قاعده‌های آنها در یك صفحه مانند P و رأسهای آنها در یك طرف صفحهٔ P واقع باشند و این دو هرم را به وسیلهٔ صفحه‌ای که با P موازی باشد قطع‌کنیم ، مقطعهای حاصل متعادل خواهند بود .

دو هرم $S.ABCD$ و $S_1.A_1B_1C_1$ (شکل ۱۱۹) را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که چهارضلعی $ABCD$ با مثلث $A_1B_1C_1$



ش ۱۱۹

معادل باشد و این دو قاعده در صفحهٔ P واقع باشند و ارتفاعهای دوهرم با هم مساوی باشند . طول مشترك دو ارتفاع را h و مساحت مشترك دو قاعده را b می‌نامیم و صفحهٔ P' را به موازات صفحهٔ P و به فاصلهٔ h' از رأس S مرور می‌دهیم بطوری که دو هرم را قطع‌کند . مساحت مقطع $A'B'C'D'$ را b' و مساحت مقطع $A'_1B'_1C'_1$ را b'_1 می‌نامیم .

نظر به قضیهٔ ۱۵۴ داریم :

$\frac{b'}{b}=\frac{h'^2}{h^2}$ و $\frac{b'_1}{b}=\frac{h'^2}{h^2}$

پس : $\frac{b'}{b}=\frac{b'_1}{b}$ و از آنجا : $b'=b'_1$

۱۵۶ ـ قضیه ـ مساحت سطح جانبی هرم منتظم مساوی است با نصف حاصل ضرب محیط قاعدهٔ آن درطول سهم هرم .

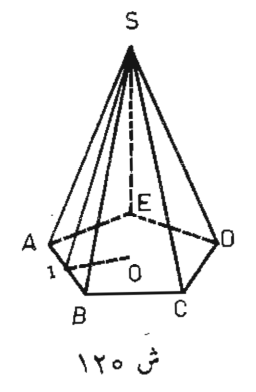
هرم منتظم S.ABCDE را در نظر می‌گیریم و سهم SI را در وجه SAB رسم می‌کنیم (شکل ۱۲۰) . مساحت مثلث SAB مساوی است با : $\frac{1}{2}AB\times SI$.

اگر مساحت سطح جانبی هرم را S و عدهٔ اضلاع قاعدهٔ آن را n و محیط این قاعده را p بنامیم ، داریم :

$$S=\frac{1}{2}AB\times SI\times n=\frac{1}{2}SI\times(n\times AB)$$

اما : $n\times AB=p$

پس : $$S=\frac{p\times SI}{2}$$



ش ۱۲۰

اگر مساحت سطح کل هرم را بخواهیم ، باید مساحت سطح جانبی آن را با مساحت قاعده جمع کنیم . اما مساحت سطح قاعده مساوی است با $\frac{p\times OI}{2}$ (OI عبارت است از شعاع دایرهٔ محاطی چندضلعی منتظم ABCDE) ، پس :

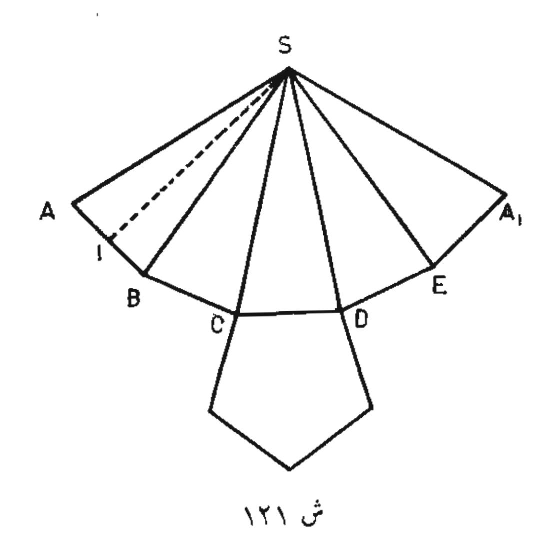
$$\text{مساحت سطح کل هرم}=\frac{p}{2}(SI+OI)$$

تمرین ـ ثابت کنید که سطح کل چهاروجهی منتظمی که طول یالش a باشد ، مساوی است با $a^2\sqrt{3}$.

۱۵۷ ـ گسترش سطح هرم منتظم ـ در یك صفحه ، مثلث SAB را مساوی با وجه SAB از هرم منتظم S.ABCDE رسم می‌کنیم و سپس مثلثهای SBC ، SCD ، SDE و SEA_1 را بترتیب مساوی با وجوه SBC ، SCD ، SDE و SEA رسم می‌کنیم (شکل ۱۲۱) . چون :

$SA=SB=SC=\dots$ و $AB=BC=CD=\dots$ ،

قسمتی از صفحه را که به چندضلعی $SABCDEA_1$ محدود است می‌توان برید و بر سطح جانبی هرم منطبق کرد . این شکل را گسترش سطح جانبی هرم می‌گویند و اگر یك چندضلعی منتظم مساوی با قاعدهٔ

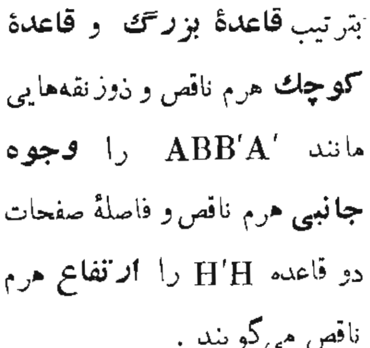


ش ۱۲۱

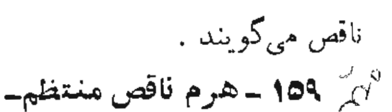
هرم به این شکل اضافه کنیم گسترش سطح کل هرم بدست می‌آید . می‌توان شکل ۱۲۱ را روی یك صفحهٔ مقوا رسم‌کرد و آن را برید و تا کرد و یك هرم منتظم ساخت .

هرم ناقص

۱۵۸ ـ تعریف ـ هرم $S.ABCD$ (شکل ۱۲۲) را در نظر می‌گیریم وآن را باصفحه‌ای موازی باقاعده‌اش قطع می‌کنیم تا چندضلعی $A'B'C'D'$ بدست آید و هرم $S.A'B'C'D'$ را حذف می‌کنیم . چندوجهی: $ABCDA'B'C'D'$ را که به این طریق حاصل می‌شود ، **هرم ناقص** می‌نامند . چندضلعیهای $ABCD$ و $A'B'C'D'$ را بترتیب **قاعدهٔ بزرگ** و **قاعدهٔ کوچك** هرم ناقص و ذوزنقه‌هایی مانند $ABB'A'$ را **وجوه جانبی** هرم ناقص و فاصلهٔ صفحات دو قاعده $H'H$ را **ارتفاع** هرم ناقص می‌گویند .



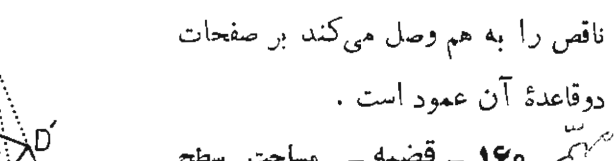
ش ۱۲۲



۱۵۹ ـ هرم ناقص منتظم ـ هرگاه هرم منتظمی را با صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ آن قطع کنیم ، هرم ناقصی راکه حاصل می‌شود **هرم ناقص منتظم** می‌نامند. قاعده‌های هرم ناقص منتظم چندضلعیهای منتظم و وجوه جانبی آن ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین هستندکه با هم مساوی می‌باشند . ارتفاع هر یك از این

ذوزنقه‌ها را **سهم** هرم ناقص می‌گویند . خطی که مراکز دو قاعدهٔ هرم ناقص را به هم وصل می‌کند بر صفحات دوقاعدهٔ آن عمود است .

۱۶۰ ـ قضیه ـ مساحت سطح جانبی هرم ناقص منتظم مساوی است با نصف حاصل‌ضرب سهم آن در مجموع محیطهای دو قاعده‌اش .



ش ۱۲۳

در شکل ۱۲۳ مساحت وجه $ABB'A'$ مساوی است با $\left(\frac{AB+A'B'}{۲}\right)\times II'$ و اگر هرم ناقص n وجه جانبی داشته باشد ، مساحت سطح جانبی آن عبارت است از :

$$S=n\times\frac{AB+A'B'}{۲}\times II'=\frac{(n\times AB+n\times A'B')\times II'}{۲}$$

و اگر محیط دوقاعده را p و p' و طول سهم را h بنامیم، داریم:

$$p=n\times AB \qquad \text{و} \qquad p'=n\times A'B' \qquad \text{و} \qquad h=II'$$

و

$$\boxed{S=\frac{h(p+p')}{۲}}$$

۱۶۱ـ مقطع هرم ناقص منتظم را به وسیلهٔ صفحه‌ای که از دو قاعدهٔ آن به یك فاصله باشد **مقطع متوسط** می‌نامند . بسهولت معلوم می‌شودکه رأسهای M و N و ... مقطع متوسط (شکل ۱۲۳) در وسط یالهای جانبی AA' و BB' و . . . واقع است و داریم :

$$MN=\frac{AB+A'B'}{۲}$$

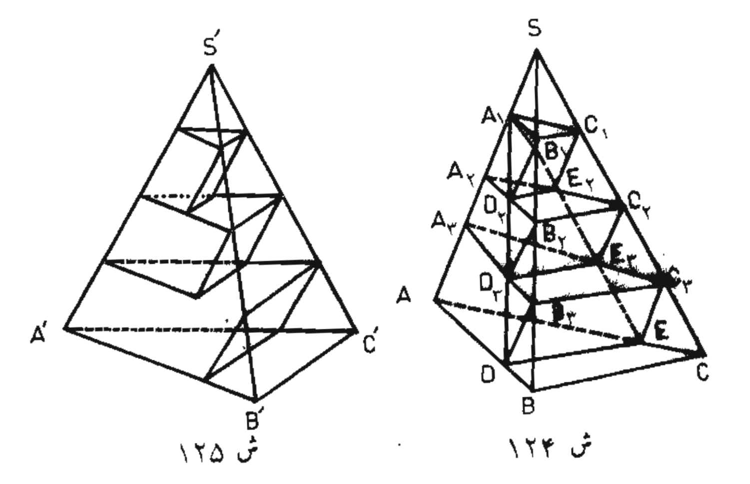
بنابراین : $S = n \times MN \times II'$

یعنی : **مساحت سطح جانبی هرم ناقص منتظم مساوی است باحاصل ضرب محیط مقطع متوسط آن در طول سهمش .**

برای بدست آوردن سطح کل هرم باید مساحات دو قاعدهٔ آن را بر سطح جانبیش افزود .

۶ - حجم هرم و هرم ناقص

۱۶۲ - منشورهای محاط دریك هرم سه پهلو- یال SA از هرم سه پهلوی S.ABC (شکل ۱۲۴) را به n قسمت متساوی (مثلا ۴ قسمت) تقسیم می‌کنیم واز نقاط تقسیم یعنی A_1 ، A_2 ، A_3 و...صفحاتی



ش ۱۲۵ ش ۱۲۴

به موازات صفحهٔ ABC می‌گذرانیم تا مقطعهای $A_1B_1C_1$ ، $A_2B_2C_2$ و ... بدست آیند و $(n-1)$ منشور سه‌پهلو مانند $A_1B_1C_1A_2D_2E_2$

و غیره را که قاعده‌های فوقانی آنها مثلثهای $A_1B_1C_1$ و ... و یالهای جانبی آنها مساوی و موازی با SA_1 هستند ، در نظر می‌گیریم ؛ **این** منشورها را **منشورهای محاط** در هرم سه‌پهلو می‌نامند ؛ **واضح است** که از اجتماع این منشورها که پهلوی هم واقع شده‌اند چندوجهی مقعر $ADE \dots A_1B_1C_1$ بوجود می‌آید و این چندوجهی که آن را P می‌نامیم ، در داخل هرم S.ABC واقع است واگر حجم چندوجهی P را V_n و حجم هرم سه‌پهلوی مفروض را V بنامیم ، داریم :

$$V_n < V \qquad (1)$$

۱۶۳ - قضیه - هرگاه عدهٔ منشورهای محاط در یك هرم سه‌پهلو بینهایت زیاد شود ، حد حجم کل آنها مساوی است با حجم هرم سه‌پهلو .

شکل ۱۲۴ را در نظر می‌گیریم . در وجه SAB نقاط A_1 ، D_2 ، D_3 و D همگی از خط SB به یك فاصله هستند؛ زیرا فواصل این نقاط ازخط مزبورعبارت است از ارتفاعهای مثلثهای متساوی SA_1B_1 ، $B_1D_2B_2$ ، $B_2D_3B_3$ و B_3DB ؛ پس نقاط مزبور روی خط A_1D که با یال SB موازی است واقع می‌باشند ؛ همچنین در وجه SAC نقاط A_1 ، E_2 ، E_3 و E همگی روی خط A_1E که با SC موازی است واقع می‌باشند . بنابراین هرم سه‌پهلوی A_1ADE کاملا داخل چندوجهی مقعر P (شمارهٔ ۱۶۲) واقع است و اگر حجم این هرم سه‌پهلو را V'_n بنامیم ، با درنظرگرفتن نامساوی۱ شمارهٔ قبل ، می‌توان نوشت :

$$V'_n < V_n < V$$

حال اگرعدهٔ منشورهای محاطی بینهایت زیاد شود (یعنی‌تقسیمات

یال SA را بینهایت زیاد کنیم) ، طول یالهای جانبی منشورهای مزبور به سمت صفر میل می‌کند و صفحهٔ A_1DE به صفحهٔ SBC که با آن موازی است بینهایت نزدیک می‌شود . بنابراین حجم V'_n به‌سمت حجم V و به طریق اولی حجم V_n به سمت حجم V میل می‌کند و قضیه ثابت است .

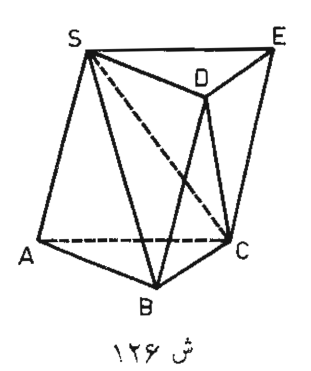
۱۶۴ ـ نتیجه ـ دو هرم سه پهلو که دارای قاعده‌های متعادل و ارتفاعهای متساوی باشند ، با یکدیگر معادلند .

فرض می‌کنیم که قاعده‌های دو هرم سه‌پهلوی S.ABC و S'.A'B'C' با هم معادل و ارتفاعهای آنها با هم مساوی باشند و بعلاوه دوقاعدهٔ ABC و A'B'C' در یك صفحه و نقاط S و S' در یك طرف این صفحه واقع باشند (شکل۱۲۴و۱۲۵) . اگر یال SA را به n قسمت متساوی تقسیم کنیم و از نقاط تقسیم صفحاتی به موازات صفحهٔ دو قاعده بگذرانیم ، این صفحات یال S'A' را نیز به n قسمت متساوی تقسیم می‌کنند و نظر به شمارهٔ ۱۵۵ مقاطع متناظر دو هرم متعادلند و بنابراین منشورهای متناظر محاط در دو هرم نیز متعادل می‌باشند . حجم V_n منشورهای محاط درهرم S.ABC مساوی است با حجم V'_n منشورهای محاط در هرم S'.A'B'C' و وقتی n به سمت بینهایت میل‌کند V_n و V'_n به‌سمت یك حد مشترك میل می‌کنند ، یعنی حجم هرم S.ABC مساوی است با حجم هرم S'.A'B'C' .

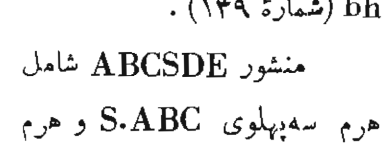
۱۶۵ ـ قضیه ـ حجم هر هرم مساوی است با یك سوم حاصل ضرب مساحت قاعدهٔ آن در ارتفاعش .

حالت اول ـ هرم سه پهلو :

هرم سه‌پهلوی S.ABC را در نظر می‌گیریم و منشور سه پهلوی ABCSDE را چنان می‌سازیم که قاعدهٔ آن مثلث ABC و یکی از یالهای جانبی آن SA باشد (شکل ۱۲۶) . واضح است که قاعدهٔ این منشور همان قاعدهٔ ABC از هرم مفروض و ارتفاع این منشور مساوی با ارتفاع هرم مفروض است . واگر مساحت‌مثلث ABC را b وارتفاع هرم مفروض را h بنامیم ، حجم منشور ABCSDE مساوی است با bh (شمارهٔ ۱۴۹) .



ش ۱۲۶



منشور ABCSDE شامل هرم سه‌پهلوی S.ABC و هرم چهارپهلوی S.BCED می‌باشد و هرم اخیر به وسیلهٔ صفحهٔ SDC به دو هرم سه‌پهلوی S.BCD و S.CDE تجزیه می‌شود . قاعده‌های دو هرم اخیر با هم مساوی و ارتفاعشان مشترك است ، پس :

حجم هرم S.BCD = حجم هرم S.CDE

از طرف دیگر اگر نقطهٔ C را رأس هرم S.CDE اختیار کنیم واضح می‌شود که قاعده‌های دوهرم S.ABC و S.CDE باهم مساوی و ارتفاعهایشان نیز با هم مساوی هستند ؛ پس این دو هرم متعادل می‌باشند و داریم :

حجم هرم S.BCD = حجم هرم S.CDE = حجم‌هرم S.ABC .

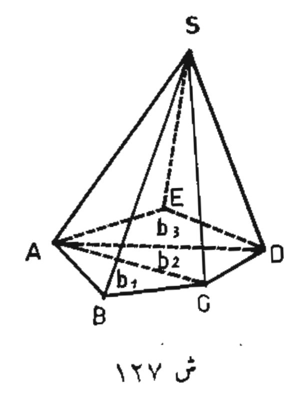
پس منشور ABCSDE از سه هرم سه پهلوی متعادل تشکیل

شده و اگر حجم هرم S.ABC را V بنامیم ، داریم :

$$V=\frac{1}{3}bh$$

حالت دوم ـ هرم چند پهلو :

هرم S.ABCDE را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۲۷). واضح است که این هرم از سه هرم سه پهلوی S.ABC ، S.ACD و S.ADE تشکیل می‌شود و سه هرم اخیر با هرم مفروض دارای یك ارتفاع مشترك هستند که آن را h می‌نامیم. اگر مساحات مثلثهای ABC ، ACD و ADE را بترتیب b_1 ، b_2 و b_3 و حجم هرم مفروض را V بنامیم، داریم :



ش ۱۲۷

$$V=\frac{1}{3}b_1h+\frac{1}{3}b_2h+\frac{1}{3}b_3h=\frac{1}{3}(b_1+b_2+b_3)h$$

اما $b_1+b_2+b_3$ عبارت است ازمساحت چندضلعی ABCDE که آن را b می‌نامیم ، پس :

$$V=\frac{1}{3}bh$$

۱۶۶ ـ نتیجهٔ ۱ ـ اگر قاعده‌های دوهرم باهم معادل و ارتفاعهایشان با هم مساوی باشند ، آن دو هرم متعادلند .

این نتیجه تعمیم نتیجهٔ شمارهٔ ۱۶۴ است .

۱۶۷ ـ نتیجهٔ ۲ ـ اگر راس یك هرم را در صفحه‌ای که از آن راس به موازات صفحهٔ قاعدهٔ هرم بگذرد تغییر مکان دهیم ، حجم آن ثابت می‌ماند .

مثلا هرم S.BCD در شکل ۱۲۶ معادل است با هرم A.BCD یا D.ABC ودرهمان شکل هرم S.DCE معادل‌است باهرم A.DCE و یا D.ACE وهرم اخیر معادل است با هرم B.ACE یا E.ABC.

۱۶۸ ـ محاسبهٔ حجم چهاروجهی منتظم برحسب طول یال آن ـ طول یال چهاروجهی منتظم ABCD را a و حجم آن را V می‌نامیم (شکل۱۱۷) . حجم این جسم عبارت است از :

$$V=\frac{1}{3}(\text{BCD مساحت})\times AH$$

اما $AH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ (شمارهٔ ۱۵۳) و مثلث BCD متساوی الاضلاع است و مساحت آن مساوی است با :

$$\frac{1}{2}a\times\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$ (شمارهٔ ۱۵۳)

پس :

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\times\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{18}}{12\times3}$$

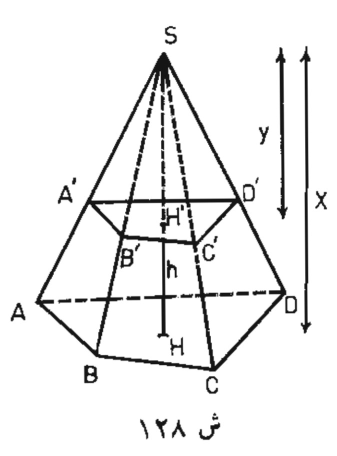
$$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

تمرین ـ مطلوب است محاسبهٔ حجم هشت‌وجهی منتظمی که طول یالش a باشد . (جواب : $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$)

حجم هرم ناقص

۱۶۹ ـ قضیه ـ حجم هرم ناقص مساوی است با یك سوم حاصل ضرب ارتفاع آن در مجموع مساحات دو قاعده و واسطهٔ هندسی آنها .

هرم ناقص $ABCDA'B'C'D'$ (شکل۱۲۸) را در نظر می‌گیریم و مساحت دو قاعدهٔ آن را b و b' و ارتفاع آن را h می‌نامیم . اگر S رأس هرمی باشدکه هرم ناقص جزوی ازآن است وارتفاعهای دو هرم $S.ABCD$ و $S.A'B'C'D'$ را بترتیب x و y بنامیم واضح است که حجم هرم ناقص که آن را V می‌نامیم ، مساوی است با تفاضل حجمهای دو هرم مزبور ، پس :



ش ۱۲۸

$$V=\frac{1}{3}bx-\frac{1}{3}b'y \qquad (1)$$

اکنون باید x و y را بر حسب b و b' و h حساب کنیم .

اما نظر به قضیهٔ ۱۵۴ داریم :

$$\frac{b}{b'}=\frac{x^2}{y^2}$$

و از طرف دیگر $x-y=h$. پس x و y را می‌توان ازدستگاه

دو معادلهٔ دو مجهولی زیر بدست آورد :

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{b}{b'}\\ x-y=h\end{cases}$$

برای حل کردن این دستگاه می‌توان نوشت :

$$\frac{x}{\sqrt{b}}=\frac{y}{\sqrt{b'}}=\frac{x-y}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}}=\frac{h}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}}$$

و از آنجا $x=\dfrac{h\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}}$ و $y=\dfrac{h\sqrt{b'}}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}}$

و چون این مقادیر x و y را در رابطهٔ (۱) قرار دهیم ، حاصل می‌شود :

$$V=\frac{bh\sqrt{b}}{3(\sqrt{b}-\sqrt{b'})}-\frac{b'h\sqrt{b'}}{3(\sqrt{b}-\sqrt{b'})}=\frac{h}{3}\times\frac{(\sqrt{b})^3-(\sqrt{b'})^3}{(\sqrt{b}-\sqrt{b'})}$$

دستور اخیر را می‌توان به وسیلهٔ اتحاد

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

یا $\dfrac{A^3-B^3}{A-B}=A^2+AB+B^2$ ساده کرد.

به ازای $A=\sqrt{b}$ و $B=\sqrt{b'}$ حاصل می‌شود :

$$V=\frac{h}{3}[(\sqrt{b})^2+\sqrt{b}\sqrt{b'}+(\sqrt{b'})^2]$$

یا

$$\boxed{V=\frac{h}{3}(b+\sqrt{bb'}+b')}$$

۱۷۰ ـ نتیجه ـ دستور فوق را می‌توان چنین نوشت :

$$V=\frac{bh}{3}+\frac{b'h}{3}+\frac{\sqrt{bb'}\times h}{3}$$

یعنی: **حجم هرم ناقص مساوی است با مجموع حجمهای سه هرم که ارتفاعهای آنها با ارتفاع هرم ناقص مساوی و قاعده‌های آنها بترتیب دو قاعدهٔ هرم ناقص و واسطهٔ هندسی آنها باشد.**

مسائل

منشور و متوازی‌السطوح

۱ ـ مطلوب است محاسبهٔ سطح جانبی و سطح کل منشور منتظمی که طول یال جانبی آن ۳a و قاعده‌اش مربعی به‌ضلع a باشد.

۲ ـ مطلوب است محاسبهٔ سطح جانبی وسطح‌کل‌منشورمنتظمی‌که قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a وطول یال جانبیش ۳a باشد.

۳ ـ مطلوب است محاسبهٔ سطح کل منشورقائمی که قاعده‌اش یك‌لوزی به اقطار a و ۳a و طول ارتفاعش ۲a باشد.

۴ ـ ثابت کنید که اگر خطی ازنقطهٔ O ، محل تلاقی اقطار متوازی‌ـ السطوح ، بگذرد وسطح آن را دردونقطهٔ M و N قطع کند ، نقطهٔ O وسط قطعه‌خط MN خواهد بود.

۵ ـ ثابت کنید که قطعه‌خطهایی که اوساط یالهای متوازی و متقابل یك متوازی‌السطوح را بهم وصل می‌کنند ، ازیك نقطه که در وسط هریك از آنها واقع است ، می‌گذرند.

۶ ـ ثابت کنید که قطعه‌خطهایی که محل تلاقی اقطار وجوه متقابل یك متوازی‌السطوح را بهم وصل می‌کنند ، از یك نقطه که در وسط هریك از آنها واقع است ، می‌گذرند.

۷ ـ ثابت کنید که اگراز محل تلاقی اقطار یك متوازی‌السطوح دوخط عمود برهم بگذرند ، این دو خط سطح متوازی‌السطوح را در چهار نقطه که رأسهای یك لوزی هستند ، قطع می‌کنند.

۸ ـ سطح یك مکعب را به وسیلهٔ صفحه‌ای که شامل قطر یکی از وجوه آن و وسط یکی ازیالهای موازی بااین‌وجه باشد، قطع می‌کنیم؛ شکل مقطع را تعیین کنید.

۹ ـ سطح یك مکعب را به وسیلهٔ صفحه‌ای‌که از سه انتهای سه یال‌مار بر یك رأس می‌گذرد ، قطع می‌کنیم ؛ اولاً شکل مقطع را تعیین‌کنید . ثانیاً مطلوب است تعیین نسبت قطعه‌خطهایی‌که به وسیلهٔ این صفحه روی قطری که از رأس مزبور می‌گذرد ، پدید می‌آید . ثالثاً ثابت‌کنیدکه این قطر برصفحهٔ مقطع عمود است .

۱۰ ـ ثابت‌کنیدکه مقطع یك مکعب به‌وسیلهٔ صفحه‌ای که ازوسط یکی از اقطار آن برآن قطر عمود شود ، یك شش‌ضلعی منتظم است .

۱۱ ـ سه خط راست Δ ، ′Δ و″Δ که دو بدو متنافر هستند مفروضند؛ متوازی‌السطوحی بسازید که سه یال آن روی سه خط مزبور واقع باشند .

۱۲ ـ طول یال یك مکعب a است ؛ طول قطر آن‌را به وسیلهٔ ترسیم هندسی بدست‌آورید . طول قطریك مکعب d است ؛ طول یال آن‌را به‌وسیلهٔ ترسیم هندسی بدست آورید .

۱۳ ـ ثابت کنید که مجموع مربعات چهار قطر هر متوازی‌السطوح مساوی است با مجموع مربعات دوازده یال آن .

حجم متوازی‌السطوح و منشور

۱۴ ـ یال یك مکعب مساوی با قطر مکعب دیگر است ؛ مطلوب است نسبت مساحات کل آنها و نسبت حجمهای آنها .

۱۵ ـ نسبت مساحت کل یك مکعب به مساحت کل یك مکعب دیگر مساوی با عدد m است ؛ مطلوب است تعیین نسبت حجم اولی به‌حجم دومی .

۱۶ ـ مطلوب است محاسبهٔ حجم یك منشور شش‌پهلوی منتظم که طول ضلع قاعده‌اش a و ارتفاعش ۲a است .

۱۷ ـ سطح کل یك منشور منتظم شش‌پهلو که ارتفاعش مساوی با قطر قاعده‌اش می‌باشد ، مساوی با ۱۵۰ سانتیمتر مربع است؛ مطلوب است محاسبهٔ حجم این منشور .

۱۸ ـ ثابت کنید که حجم هر منشور چندپهلوی منتظم مساوی است با نصف حاصل ضرب مساحت سطح جانبی آن در سهم چند ضلعی قاعده‌اش .

هرم

۱۹ ـ قاعدهٔ يك هرم منتظم هشت‌ضلعی منتظمی است به ضلع ۳سانتیمتر و طول يال جانبی هرم ۵ سانتیمتر است ؛ مطلوب است محاسبهٔ سطح جانبی آن .

۲۰ ـ قاعدهٔ يك هرم منتظم مربعی است به ضلع ۵ سانتیمتر و ارتفاع هرم مساوی با ۴ سانتیمتر است ؛ سطح کل آن را حساب کنید .

۲۱ ـ طول يال جانبی يك هرم شش‌پهلوی منتظم مساوی با ۶ سانتیمتر و ارتفاع هرم ۵ سانتیمتر است ؛ سطح جانبی آن را حساب کنید .

۲۲ ـ قطرهای غیرمتوازی دو وجه متقابل ازيك مكعب را درنظرگرفته انتهای‌آنها را بهم وصل می‌کنیم؛ مطلوب‌است محاسبهٔ سطح‌جانبی چهاروجهی حاصل برحسب طول يال مكعب .

۲۳ ـ قاعدهٔ بزرگتر يك هرم ناقص عبارت است از مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقینی که طول ضلع زاویهٔ قائمه‌اش a است وطول یکی از يالهای جانبی که بر صفحهٔ قاعده عمود است ، مساوی با a می‌باشد ویکی از اضلاع متساوی قاعدهٔ کوچکتر مساوی با $\frac{a}{2}$ است؛ مطلوب است محاسبهٔ سطح جانبی این هرم ناقص .

حجم هرم :

۲۴ ـ قاعدهٔ يك هرم منتظم ، مثلث متساوی‌الاضلاعی است به ضلع a و وجوه جانبی آن مثلثهای قائم‌الزاویه به رأس مشترك A هستند ؛ مطلوب است اولا محاسبهٔ حجم هرم و ثانیاً فاصلهٔ رأس A ازقاعدهٔ هرم .

۲۵ ـ روی يالهای يك كنج سه قائمه به‌رأس O طولهای OA ، OB و OC را بترتیب مساوی با a ، $2a$ و $3a$ جدا می‌کنیم .
مطلوب است اولا محاسبهٔ حجم $O.ABC$ و ثانیاً محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ O از صفحهٔ ABC .

۲۶ ـ ثابت کنید صفحه‌ای که از يك يال يك چهاروجهی و وسط يال مقابل به‌آن می‌گذرد ، حجم چهاروجهی را به‌دوقسمت متعادل تقسیم می‌کند .

۲۷ ـ قطرهای غیرمتوازی از دو وجه متقابل يك مكعب را در نظر می‌گیریم ، مطلوب است محاسبهٔ حجم چهاروجهی که رأسهایش انتهای این‌دو قطر باشند برحسب طول ضلع مكعب .

۲۸ ـ ثابت کنیدکه اگر نقطه‌ای در داخل يك چهاروجهی منتظم تغییر مکان دهد ، مجموع فواصل آن نقطه از چهار وجه ثابت می‌ماند .

۲۹ ـ مطلوب است محاسبهٔ حجم هرم ناقص منتظمی‌که قاعدهٔ بزرگترش شش‌ضلعی منتظمی است به ضلع a و ارتفاعش مساوی با $a\sqrt{2}$ و طول يال جانبیش $\frac{3a}{2}$ است .

۳۰ ـ قاعده‌های هرم ناقص منتظمی دو مربع هستندکه طول ضلع یکی ازآنها $2a$ وطول ضلع دیگری a است و حجم این هرم ناقص منتظم مساوی با $\frac{7a^3}{3}$ می‌باشد ؛ مطلوب است محاسبهٔ ارتفاع آن .

مسائل مختلف

۳۱ ـ ثابت کنید که اگر قطرهای يك متوازی‌السطوح با هم مساوی باشند ، جسم ، يك مكعب مستطیل است .

۳۲ ـ ثابت کنید که در هر مكعب اولا زاویهٔ هريال با هريك ازاقطار مكعب همواره یکی است . ثانیاً تصویر هريال روی هرقطر مساوی است بايك سوم قطر مكعب ـ تصویر يك مكعب را روی صفحه‌ای که بریکی از اقطار آن عمود باشد رسم کنید .

۳۳ ـ ثابت کنید که در هر چهاروجهی :
اولا سه قطعه‌خط که اوساط اضلاع متقابل را به هم وصل می‌کنند ، از يك نقطه مانند G که در وسط هريك از آنها واقع است می‌گذرند .
ثانیاً شش صفحه که هريك ازآنها ازيك يال و از وسط يال مقابل به‌آن

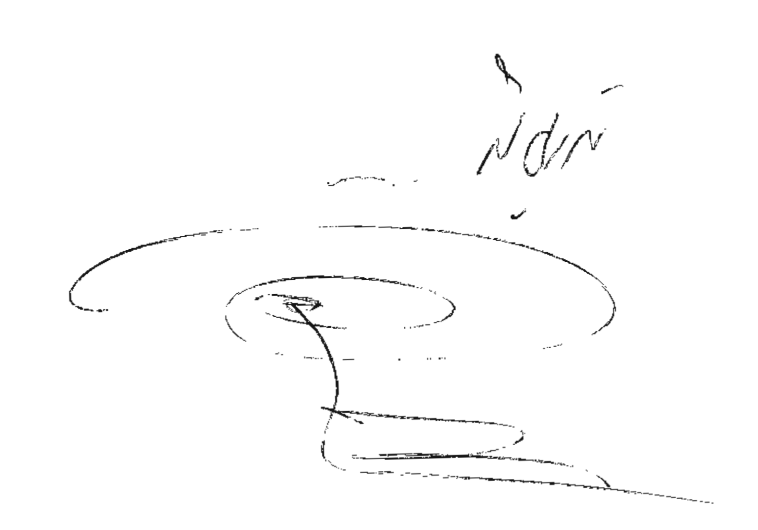
عبور می‌کنند ، از نقطهٔ G می‌گذرند .

ثالثاً چهار قطعه‌خط که هریك از آنها یك رأس را به‌محل تلاقی میانه‌های وجه‌مقابل به‌آن رأس وصل‌می‌کنند، از نقطهٔ G می‌گذرند و نقطهٔ G درسه‌چهارم هر یك از آنها ابتدا از رأس واقع است .

۳۴ ـ ثابت‌کنیدکه صفحات منصف فرجه‌های هرچهاروجهی، ازیك نقطه که از چهار وجه جسم به یك فاصله است ، می‌گذرند .

۳۵ ـ ثابت کنید که صفحات عمود منصف یالهای هر چهاروجهی ازیك نقطه می‌گذرند .

۳۶ ـ چهاروجهی ABCD مفروض است و می‌دانیم که یالهای AD و BC از آن بر هم عمودند ؛ ثابت‌کنیدکه تصویر نقطهٔ A برصفحهٔ BCD روی ارتفاع نظیر ضلع BC ازمثلث BCD واقع است .

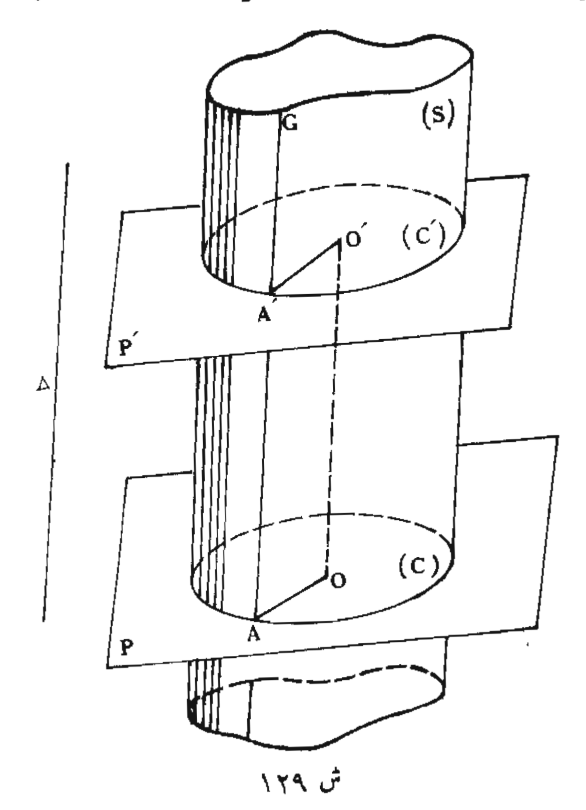


فصل سوم

۱ ـ استوانه

۱۷۱ ـ سطح استوانه‌ای ـ خط راست Δ و منحنی مسطح C را که صفحه‌اش با Δ موازی نیست ، در نظر می‌گیریم .

هرگاه خط راست AG چنان تغییر مکان دهد که همواره با خط



ش ۱۲۹

ثابت Δ موازی و بر منحنی ثابت C متکی باشد، ازحرکت خط راست AG سطحی ایجاد می‌شود که آن را سطح استوانه‌ای می‌گویند (شکل ۱۲۹) .

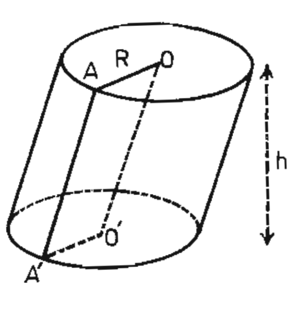
هر یك از اوضاع خط راست و متحرك AG را **مولد** سطح استوانه‌ای و منحنی ثابت C را **هادی** و راستای Δ را **راستای مولد** سطح استوانه‌ای می‌نامند. از هر نقطهٔ متعلق به سطح استوانه‌ای یك مولد و فقط یکی می‌گذرد. آنچه بعد از این در این مبحث گفته می‌شود، همواره فرض می‌کنیم‌که منحنی هادی سطح استوانه‌ای یك دایره باشد؛ در این صورت سطح استوانه‌ای را **مستدیر** می‌گویند.

۱۷۲ ـ قضیه ـ هرگاه دایرهٔ C هادی سطح استوانه‌ای S باشد، هر صفحه‌که با صفحهٔ دایرهٔ C موازی باشد، سطح S را در دایره‌ای مانند C' که با دایرهٔ C مساوی است قطع خواهد کرد.

صفحهٔ دایرهٔ C را P می‌نامیم و صفحهٔ P' را که با صفحهٔ P موازی است در نظر می‌گیریم و نقطه‌ای مانند A روی دایرهٔ C اختیار می‌کنیم (شکل ۱۲۹). اگر از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ C خطی به‌موازات راستای مولد Δ رسم کنیم، صفحهٔ P' این خط را در نقطه‌ای مانند O' و مولد AG را در نقطه‌ای مانند A' قطع می‌کند (شمارهٔ ۱۲) و قطعه خطهای OO' و AA' متوازی و متساویند (شمارهٔ ۳۵) و چهارضلعی $OO'A'A$ متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین قطعه‌خطهای OA و $O'A'$ با هم مساوی می‌باشند و وقتی که نقطهٔ A روی دایرهٔ C حرکت کند، نقطهٔ A' در صفحهٔ P' دایره‌ای به مرکز O' و به شعاع $O'A'=OA$ می‌پیماید. پس فصل مشترك سطح S با صفحهٔ P' دایره‌ای است که با C مساوی می‌باشد.

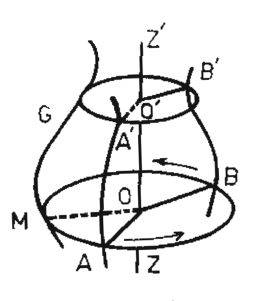
۱۷۳ ـ استوانهٔ مستدیر ـ هرگاه یك سطح استوانه‌ای مستدیر

را بادوصفحه که باصفحهٔ دایرهٔ هادی موازی باشند قطع کنیم، جسمی را که به سطح استوانه‌ای و دو صفحهٔ مزبور محدود می‌شود، استوانهٔ مستدیر گویند (شکل۱۳۰). دو مقطع حاصل، نظر به قضیهٔ ۱۷۲، دو دایرهٔ متساوی می‌باشند. هر یك از این دو دایره را **قاعدهٔ** استوانهٔ مستدیر و شعاع مشترك آنها را **شعاع** استوانهٔ مستدیر و فاصلهٔ صفحات آنها را **ارتفاع** استوانهٔ مستدیر می‌گویند.



ش ۱۳۰

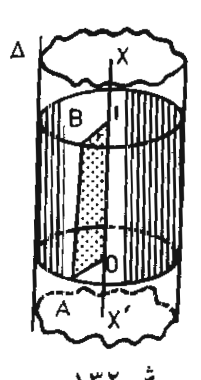
۱۷۴ ـ سطح دوّار ـ منحنی مسطح G وخط راست $z'z$ را در صفحهٔ آن در نظر می‌گیریم؛ اگر صفحهٔ این منحنی در حول خط $z'z$ دوران کند، از حرکت منحنی G سطحی ایجاد می‌شود که آن را **سطح دوار** می‌گویند. خط $z'z$ را **محور** سطح دوار می‌نامند (شکل ۱۳۱). هر نقطه مانند M از منحنی G در ضمن حرکت دایره‌ای می‌پیماید که مرکز آن روی محور $z'z$ واقع است و صفحهٔ آن بر محور $z'z$ عمود می‌باشد؛ هریك از دایره‌هایی را که نقاط مختلف منحنی G می‌پیمایند، **مدار** سطح دوّار می‌گویند. هرصفحه‌که از محورسطح دوّار بگذرد، **صفحهٔ نصف‌النهار** سطح دوّار نامیده می‌شود، و مقطع آن با سطح دوار نصف‌النهار سطح دوّار گفته می‌شود.



ش ۱۳۱

۱۷۵ ـ سطح استوانه‌ای دوّار ـ دوخط راست متوازی Δ و $x'x$ را در نظر می‌گیریم ؛ اگر صفحه‌ای که شامل این دو خط متوازی است در حول $x'x$ دوران کند ، از حرکت خط راست Δ سطح دوّاری ایجاد می‌شود که آن را **سطح استوانه‌ای دوّار** می‌گویند (شکل ۱۳۲) .

از حرکت هر یك از نقاط خط Δ دایره‌ای ایجاد می‌شود که صفحه‌اش بر خط مولد Δ عمود است و می‌توان آن را دایرهٔ هادی سطح استوانه‌ای دوار دانست .



ش ۱۳۲

۱۷۶ ـ استوانهٔ دوّار ـ اگر سطح استوانه‌ای دوّاری را با دو صفحه که بر محور آن عمود باشند قطع کنیم ، استوانه‌ای بدست می‌آید که آن را استوانهٔ دوّار می‌نامند (شکل۱۳۲) . و نیز می‌توان گفت : **استوانهٔ دوّار جسمی است که از دوران یك مستطیل مانند $OABI$ در حول یکی از اضلاعش (مثلا OI) ایجاد می‌شود.** قطعه‌خط OI که مراکز دو قاعدهٔ استوانهٔ دوار را بهم وصل می‌کند برابر ارتفاع استوانهٔ دوار و قطعه‌خط AB مولد استوانهٔ دوّار است .

مولدهای استوانهٔ دوار بر صفحهٔ هریك از دو قاعدهٔ آن عمودند.

۱۷۷ـ خط مماس بر یك سطح ـ هرگاه منحنی R روی سطح S رسم شده وخط راست MT درنقطهٔ M با منحنی R مماس باشد، می‌گویند که خط راست MT درنقطهٔ M با سطح S مماس است (شکل ۱۳۳) .

به عبارت دیگر ، هرگاه خط راست MM' سطح S را در نقاط M و M' قطع کند و نقطهٔ M' قوس MM' واقع بر منحنی R از سطح S را بپیماید و بینهایت به نقطهٔ M نزدیك شود، حد اوضاع قاطع MM' را **خط مماس برسطح S در نقطهٔ M** می‌نامند . از نقطهٔ M منحنیهای بیشماری روی سطح S می‌توان رسم‌کرد ، پس عموماً بینهایت خط مماس در نقطهٔ M بر سطح S وجود دارد .

ش ۱۳۳

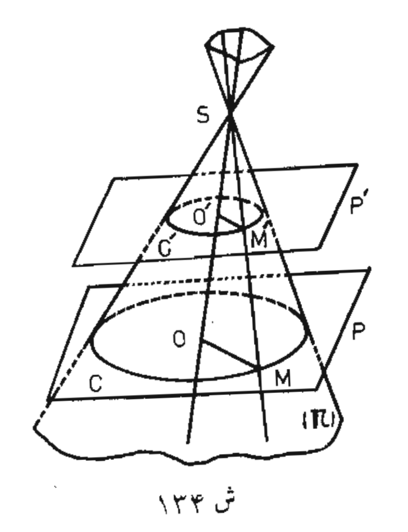
۲ ـ مخروط

۱۷۸ ـ سطح مخروطی ـ منحنی‌مسطح C و نقطهٔ S را در خارج صفحهٔ آن درنظر می‌گیریم؛ **هرگاه خط راست SM چنان تغییرمکان دهد که همواره از نقطهٔ ثابت S بگذرد و بر منحنی ثابت C متکی باشد ، از حرکت خط راست SM سطحی ایجاد می‌شود که آن را سطح مخروطی می‌گویند** (شکل ۱۳۴) .

هریك ازاوضاع خط راست ومتحرك SM را **مولد** سطح مخروطی و منحنی ثابت C را **هادی** سطح مخروطی و نقطهٔ ثابت S را **راس** سطح مخروطی می‌نامند . از هر نقطهٔ متعلق به سطح مخروطی یك مولد و فقط یکی می‌گذرد . این سطح مرکب است از دو **دامنه** که یکی از آنها از حرکت نیم‌خط SM ایجاد می‌شود و دیگری از حرکت نیم‌خط مقابل به SM پدید می‌آید . آنچه بعد از این در این

مبحث گفتگو می‌شود ، همواره فرض می‌کنیم که منحنی هادی سطح مخروطی یك دایره باشد؛ در این صورت سطح مخروطی را **مستدیر** می‌گویند .

۱۷۹ - قضیه - هرگاه دایرهٔ C هادی سطح مخروطی π باشد ، هرصفحه‌که با صفحهٔ دایرهٔ C موازی باشد، سطح π را در دایره‌ای مانند C' قطع خواهد کرد .



ش ۱۳۴

صفحهٔ دایرهٔ C را P و مرکز این دایره را O می‌نامیم و صفحهٔ P' راکه با صفحهٔ P موازی است در نظر می‌گیریم و نقطه‌ای مانند M روی دایرهٔ C اختیار می‌کنیم (شکل ۱۳۴) . خطوط راست SO و SM صفحهٔ P' را بترتیب در نقاط O' و M' قطع می‌کنند (شمارهٔ ۳۳)؛ از تشابه دو مثلث SOM و SO'M' حاصل می‌شود :

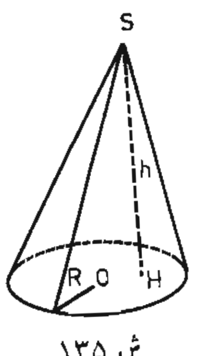
$$\frac{O'M'}{OM}=\frac{SO'}{SO} \quad \text{و از آنجا} \quad O'M'=OM\times\frac{SO'}{SO}$$

اما قطعه‌خطهای SO و SO' ثابت هستند و چون OM شعاع دایرهٔ قاعده است ، طول آن ثابت است ؛ بنابراین طول قطعه‌خط O'M' همواره مقداری است ثابت و وقتی که نقطهٔ M روی دایرهٔ C حرکت کند، نقطهٔ M' در صفحهٔ P' دایره‌ای به مرکز O' و به شعاع O'M' می‌پیماید؛

پس فصل مشترك سطح π با صفحهٔ P' یك دایره است .

تبصره - نسبت شعاع دایرهٔ C' به شعاع دایرهٔ C مساوی است با نسبت فاصلهٔ نقطهٔ S از صفحهٔ P' به فاصلهٔ نقطهٔ S از صفحهٔ P .

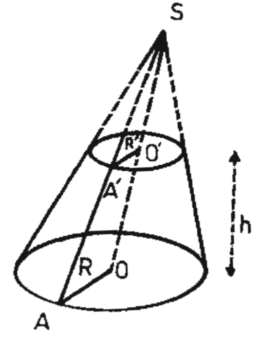
۱۸۰ - مخروط مستدیر - جسمی را که به یکی از دو دامنهٔ سطح مخروطی مستدیر و صفحهٔ دایرهٔ هادی آن محدود می‌شود ، مخروط مستدیر می‌نامند (شکل ۱۳۵) .



ش ۱۳۵

دایرهٔ هادی سطح مخروطی مزبور را **قاعدهٔ** مخروط مستدیر و شعاع این دایره را **شعاع** مخروط مستدیر وفاصلهٔ SH رأس S را ازصفحهٔ قاعده ، **ارتفاع** مخروط مستدیر می‌گویند .

۱۸۱ - مخروط مستدیر ناقص - هرگاه یك مخروط مستدیررا با صفحه‌ای که با قاعدهٔ آن موازی باشد قطع کنیم ، قسمتی از مخروط را که بین صفحهٔ قاعده وصفحهٔ مقطع واقع می‌شود، مخروط ناقص‌مستدیر می‌نامند (شکل ۱۳۶) .



ش ۱۳۶

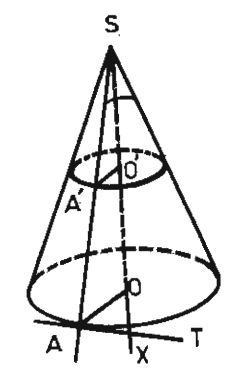
این مقطع راکه یك دایره است (شمارهٔ ۱۷۹) **قاعدهٔ** دوم مخروط ناقص مستدیر و فاصلهٔ صفحهٔ مقطع را از صفحهٔ قاعدهٔ مخروط اصلی

ارتفاع مخروط ناقص مستدیر می‌گویند .

۱۸۲ ـ سطح مخروطی دوّار ـ دوخط راست متقاطع SA و Sx را درنظر می‌گیریم (شکل ۱۳۷) ؛ اگر صفحهٔ ASx در حول خط Sx دوران کند ، از حرکت خط SA یك **سطح مخروطی دوار** ایجاد می‌شود . دراین حرکت نقطهٔ A دایره‌ای می‌پیماید که صفحه‌اش برمحور Sx عمود است .

۱۸۳ ـ مخروط دوّار ـ اگر یك سطح مخروطیِ دوّار را با صفحه‌ای که برمحورش عمود باشد قطع کنیم، مخروطی بدست می‌آید که آن را مخروط دوّار می‌نامند (شکل۱۳۷) . ونیز می‌توان گفت :

مخروط دوّار جسمی است که از دوران یك مثلث قائم‌الزاویه مانند SOA ($\hat{O}=90^\circ$) در حول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه‌اش (مثلا SO) ایجاد می‌شود . قطعه خط SO که رأس مخروط دوار را به مرکز قاعده‌اش وصل می‌کند **ارتفاع مخروط دوّار** و قطعه‌خط SA **مولد** یا **سهم** مخروط دوار است . زاویهٔ OSA را **نیم زاویهٔ رأس** مخروط دوار می‌نامند .

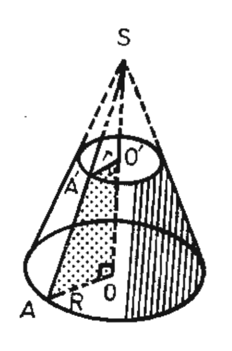


ش ۱۳۷

۱۸۴ ـ مخروط ناقص دوّار ـ اگریك مخروط دوار را به وسیلهٔ صفحه‌ای که با صفحهٔ قاعده‌اش موازی باشد قطع کنیم ، قسمتی از مخروط را که بین صفحهٔ قاعده و صفحهٔ مقطع واقع می‌شود مخروط ناقص دوار

می‌نامند (شکل ۱۳۸) .

مخروط ناقص دوّار از دوران یك ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه مانند OO'A'A درحول ساق OO' که بر دو قاعده‌اش عمود است ایجاد می‌شود . قطعه‌خط OO' که مراکز دو قاعدهٔ مخروط ناقص دوّار را به هم وصل می‌کند، برابر ارتفاع مخروط ناقص دوّار وقطعه‌خط AA' **مولد** یا **سهم** مخروط ناقص دوّار است .

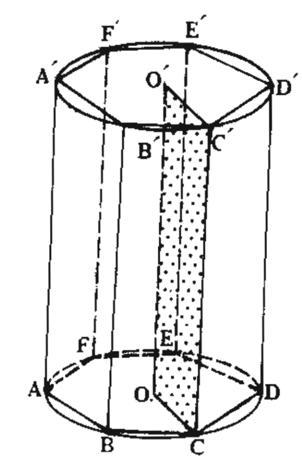


ش ۱۳۸

۳ ـ اندازهٔ سطح و حجم استوانه و مخروط

۱۸۵ ـ سطح جانبی استوانهٔ دوار ـ نمی‌توان قسمتی از یك سطح‌خمیده‌را با واحداندازه‌گیری سطح که مترمربع است ، اندازه گرفت ؛ بنابراین باید مساحت سطح استوانه‌را تعریف کنیم :

استوانهٔ دواری راکه قاعدهٔ آن دایرهٔ (O و R) و ارتفاع آن OO'=h است در نظر می‌گیریم (شکل ۱۳۹) ؛ چندضلعی منتظم ABCDEF رادر دایرهٔ O محاط



ش ۱۳۹

می‌کنیم و منشور قائمی را که قاعده‌اش چندضلعی منتظم $ABCDEF$ و ارتفاعش OO' باشد می‌سازیم ؛ این منشور را **محاط در استوانهٔ دوّار** می‌گویند .

اگر عدهٔ اضلاع چندضلعی منتظم مزبور بینهایت زیاد شود ، این چندضلعی به‌طرف دایرهٔ O ومنشور قائم مزبور به‌طرف استوانهٔ مفروض میل می‌کند و از این رو می‌توان تعریف زیر را بیان‌کرد :

تعریف ـ مساحت سطح جانبی استوانهٔ دوّار عبارت است از حد مساحت سطح جانبی منشور منتظم محدبی که در آن استوانه محاط شده باشد وقتی که عدهٔ وجوه جانبی آن بینهایت زیاد شود .

در شرایط فوق ، محیط چندضلعی منتظم به سمت محیط دایره ، یعنی $2\pi R$ ، میل می‌کند و حد مساحت سطح جانبی منشور محاطی‌عبارت است از :

$$S=2\pi Rh$$

از آنچه گذشت ، قضیهٔ زیر بدست می‌آید :

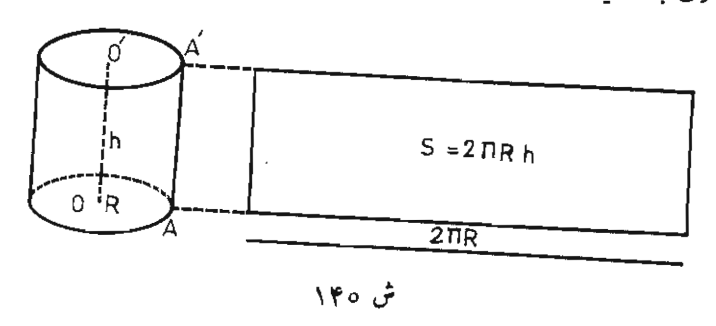
قضیه ـ مساحت سطح جانبی استوانهٔ دوّار مساوی است با حاصل ضرب محیط دایرهٔ قاعدهٔ آن در طول ارتفاعش .

مساحت سطح کلّ استوانهٔ دوّار عبارت است ازمساحت سطح جانبی آن بعلاوهٔ مجموع مساحتهای دو قاعده‌اش یعنی :

مساحت سطح‌کل استوانهٔ دوّار $= 2\pi Rh + 2\pi R^2$

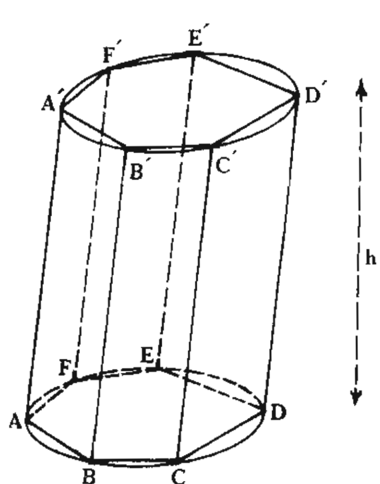
۱۸۶ ـ گسترش استوانهٔ دوار ـ قبول می‌کنیم ، که اگر سطح جانبی استوانهٔ دوار را در طول مولد AA' قطع‌کنیم ، می‌توانیم آن را

روی یك صفحه بگستریم (شکل۱۴۰) . به این ترتیب ، یك مستطیل بدست می‌آید که یك بعدش مساوی با ارتفاع استوانه و بعد دیگرش مساوی با محیط قاعدهٔ استوانه است .



ش ۱۴۰

۱۸۷ ـ حجم استوانهٔ مستدیر ـ درقاعدهٔ استوانهٔ مستدیر، یعنی در دایرهٔ (O و R) ، چندضلعی منتظم و محدب $ABCDEF$ را محاط می‌کنیم و منشوری می‌سازیم که قاعده‌اش این چندضلعی منتظم ویالهای جانبیش مولدهایی از استوانهٔ مستدیر باشند (شکل۱۴۱) ؛ این منشور را **محاط دراستوانه** می‌گویند .



ش ۱۴۱

وقتی عدهٔ وجوه جانبی منشور محاطی بینهایت زیاد شود ، این منشور به طرف استوانهٔ مستدیر میل خواهد کرد . پس :

حجم استوانهٔ مستدیر عبارت

است از حد حجم منشور محاطی‌که قاعده‌اش چندضلعی منتظم محدبی باشد وقتی‌که عدهٔ وجوه جانبی این منشور بینهایت زیاد شود .

اما می‌دانیم که حجم این منشور مساوی است با حاصل ضرب مساحت قاعدهٔ آن در ارتفاعش ؛ وقتی‌که عدهٔ وجوه جانبی منشور محاطی بینهایت زیاد شود، مساحت قاعدهٔ منشور محاطی به‌سمت مساحت دایرهٔ قاعدهٔ استوانه یعنی به سمت πR^2 میل می‌کند و ارتفاع منشور همواره همان ارتفاع استوانه است و چون این ارتفاع را h و حجم استوانهٔ مستدیر را V بنامیم ، داریم :

$$V=\pi R^2 h$$

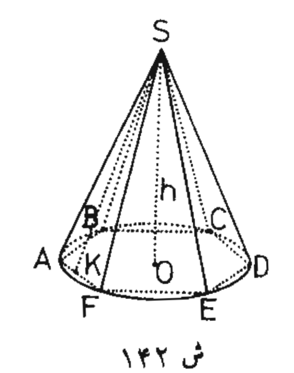
از آنچه گذشت ، قضیهٔ زیر بدست می‌آید :

قضیه ــ حجم استوانهٔ مستدیر مساوی است با حاصل‌ضرب مساحت دایرهٔ قاعدهٔ آن در ارتفاعش .

تبصره ــ این قضیه در مورد استوانهٔ دوّار نیز صحیح است (شکل ۱۳۹) . [ارتفاع استوانهٔ دوّار همان $OO'=h$ است] .

۱۸۸ ــ مساحت سطح جانبی مخروط دوار ــ همانطور که در مورد استوانه گفتیم ، سطح جانبی مخروط را نیز باید تعریف‌کرد :

مخروط دواری را که قاعده‌اش دایرهٔ O و ارتفاع آن $SO=h$ است در نظر می‌گیریم (شکل ۱۴۲) و چند ضلعی منتظم



ش ۱۴۲

$ABCDEF$ را در دایرهٔ O محاط می‌کنیم وهرم منتظم P راکه رأسش S و قاعده‌اش این چندضلعی منتظم باشد می‌سازیم . این هرم را **محاط در مخروط دوار** می‌گویند .

اگر عدهٔ اضلاع چندضلعی منتظم مزبور بینهایت زیاد شود ، این چندضلعی به طرف دایرهٔ O و هرم P به طرف مخروط مفروض میل می‌کند و از این رو می‌توان تعریف زیر را بیان کرد :

تعریف ــ مساحت سطح جانبی مخروط دوار عبارت است از حد مساحت سطح جانبی هرم منتظم محدبی که درآن مخروط محاط شده باشد وقتی که عدهٔ وجوه جانبی آن بینهایت زیاد شود .

درشرایط فوق، محیط چندضلعی منتظم به‌سمت محیط دایره، یعنی $2\pi R$ ، میل می‌کند و ارتفاع SK از وجه SAF یعنی سهم هرم P ، به‌سمت $SA=a$ ، یعنی مولد مخروط ، میل می‌کند (زیرا نقطهٔ K که وسط AF است ، وقتی طول ضلع AF به سمت صفر میل‌کند ، به سمت نقطهٔ A میل می‌کند) . مساحت سطح جانبی هرم P عبارت است از نصف حاصل ضرب محیط قاعدهٔ آن در طول سهم SK ؛ پس مساحت سطح جانبی مخروط دوّار که آن را S می‌نامیم عبارت است از :

$$S=\frac{1}{2}\times 2\pi R\times SA \quad \text{یا} \quad \boxed{S=\pi Ra}$$

از آنچه گذشت ، قضیهٔ زیر بدست می‌آید :

قضیه ــ مساحت سطح جانبی مخروط دوار مساوی است با نصف حاصل ضرب محیط دایرهٔ قاعدهٔ آن در طول مولدش .

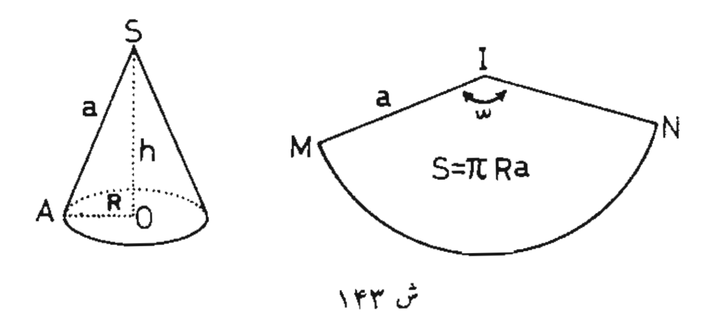
مساحت سطح کل مخروط دوار عبارت است از مساحت سطح

جانبی آن بعلاوهٔ مساحت دایرهٔ قاعده‌اش یعنی :

$\pi Ra+\pi R^2=$ مساحت سطح کل مخروط دوّار

۱۸۹ـ گسترش مخروط دوّار ـ قبول می‌کنیم که اگر سطح جانبی مخروط دوّار را درطول مولد SA قطع کنیم، می‌توانیم آن را روی یك صفحه بگستریم (شکل۱۴۳)؛ به این ترتیب ، قطاع دایرهٔ IMN بدست می‌آید که شعاعش مساوی با مولد مخروط است .

کمان MN عبارت است از گسترش دایرهٔ قاعدهٔ مخروط و طول آن مساوی است با $2\pi R$ ؛ چون این کمان متعلق به دایره‌ای به شعاع



ش ۱۴۳

a می‌باشد ، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبروی آن برحسب رادیان مساوی است با $\omega=\frac{2\pi R}{a}$ و بر حسب درجه مساوی است با $\frac{R}{a}\times 360$.

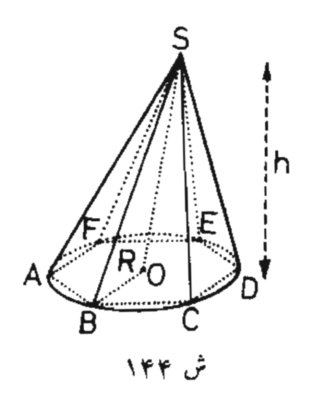
به این طریق می‌توان مساحت سطح جانبی مخروط را نیز بدست آورد ، زیرا مساحت قطاع دایرهٔ IMN مساوی است با :

$$\frac{1}{2}a^2\omega=\frac{1}{2}a^2\times\frac{2\pi R}{a}=\pi Ra$$

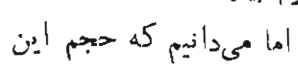
۱۹۰ـ حجم مخروط مستدیر ـ درقاعدهٔ مخروط مستدیر یعنی

در دایرهٔ (O و R) چندضلعی منتظم و محدب ABCDEF را محاط می‌کنیم و هرمی می‌سازیم که قاعده‌اش این چند ضلعی منتظم و رأسش همان رأس مخروط باشد (شکل۱۴۴) ؛ این هرم را **محاط درمخروط** می‌گویند . وقتی که عدهٔ وجوه جانبی هرم محاطی بینهایت زیاد شود ، این هرم به‌طرف مخروط مستدیر میل خواهدکرد ، پس :

حجم مخروط مستدیر عبارت است از حد حجم هرم محاطی که قاعده‌اش چندضلعی منتظم محدبی باشد وقتی که عدهٔ وجوه جانبی این هرم بینهایت زیاد شود .



ش ۱۴۴



اما می‌دانیم که حجم این هرم مساوی است با یك سوم حاصل ضرب مساحت قاعدهٔآن در ارتفاعش ؛ وقتی که عدهٔ وجوه جانبی هرم محاطی بینهایت زیاد شود ، مساحت قاعدهٔ هرم محاطی به‌سمت مساحت دایرهٔ قاعدهٔ مخروط یعنی به‌سمت πR^2 میل می‌کند و ارتفاع هرم همواره همان ارتفاع مخروط است و چون این ارتفاع را h و حجم مخروط مستدیر را V بنامیم داریم :

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2h$$

از آنچه گذشت ، قضیهٔ زیر بدست می‌آید :

قضیه ـ حجم مخروط مستدیر مساوی است با یك سوم حاصل ضرب مساحت دایرهٔ قاعدهٔ آن در ارتفاعش .

تبصره ـ این قضیه درمورد مخروط دوّار نیز صحیح است (شکل

۱۴۲) [ارتفاع مخروط دوّار همان $SO=h$ است] .

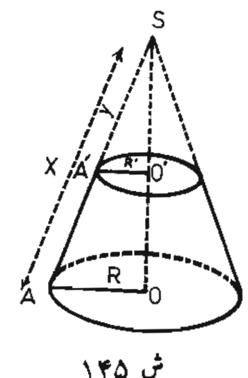
۱۹۱ ـ مساحت سطح جانبی مخروط ناقص دوّار ـ مخروط دوّار به رأس S را در نظر می‌گیریم و آن را با صفحه‌ای که با صفحهٔ قاعده‌اش موازی باشد قطع می‌کنیم تا یك مخروط ناقص دوّار پدید آید (شکل ۱۴۵) . و شعاعهای OA و O'A' دو قاعدهٔ این مخروط ناقص دوّار را بترتیب R و R' و مولد آن یعنی AA' را a می‌نامیم و نیز طولهای SA و SA' یعنی مولدهای دو مخروط به رأس S را که قاعده‌های آنها دوایر O و O' هستند ، بترتیب x و y می‌نامیم :

$$SA'=y \quad \text{و} \quad SA=x$$

مساحت سطح جانبی مخروط ناقص دوّار ، که آن را S می‌نامیم، عبارت است از تفاضل مساحات سطوح جانبی این دو مخروط ، پس :

$S=\pi Rx-\pi R'y$ (شمارهٔ ۱۸۸) .

اکنون می‌خواهیم S را بر حسب R و R' و a حساب‌کنیم؛ برای این کار باید x و y را بر حسب R و R' و a بدست آورد ؛ ملاحظه می‌کنیم که :



ش ۱۴۵

$$SA-SA'=AA' \quad \text{پس} \quad x-y=a$$

و از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ SOA و SO'A' داریم :

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{OA}{O'A'} \quad \text{یا} \quad \frac{x}{y}=\frac{R}{R'}$$

و از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود :

$$\frac{x}{R}=\frac{y}{R'}=\frac{x-y}{R-R'}=\frac{a}{R-R'}$$

و از آنجا

$$x=\frac{aR}{R-R'} \quad \text{و} \quad y=\frac{aR'}{R-R'}$$

پس

$$S=\frac{\pi aR^2}{R-R'}-\frac{\pi aR'^2}{R-R'}=\frac{\pi a(R^2-R'^2)}{R-R'}$$

یا

$$\boxed{S=\pi a(R+R')}$$

اما $\pi(R+R')$ عبارت است از نصف مجموع محیطهای دوقاعده ؛

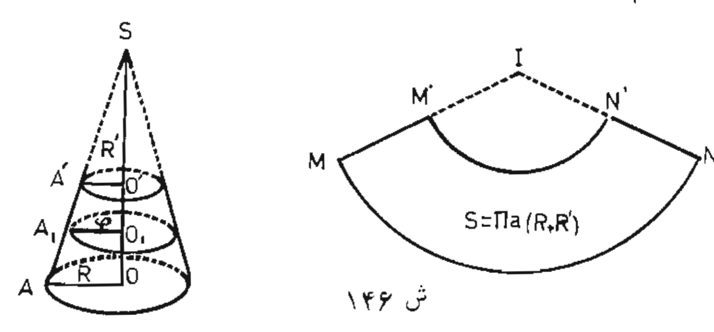
پس :

قضیه ـ مساحت سطح جانبی مخروط ناقص دوار مساوی است با حاصل ضرب نصف مجموع محیطهای دو قاعدهٔ آن در طول مولدش .

مساحت سطح کل مخروط ناقص دوّار عبارت است از مساحت سطح جانبی آن بعلاوهٔ مجموع مساحات سطوح دو قاعده‌اش یعنی :

مساحت سطح کل مخروط ناقص‌دوّار $=\pi a(R+R')+\pi(R^2+R'^2)$.

۱۹۲ ـ تبصره ـ صفحه‌ای‌که باصفحهٔ دوقاعدهٔ مخروط ناقص‌دوّار موازی و از آنها به‌یك فاصله باشد ، سطح جانبی آن را در دایره‌ای قطع می‌کند که شعاعش φ مساوی است با نصف مجموع شعاعهای دو قاعده یعنی : $\varphi=\frac{R+R'}{2}$ (شکل ۱۴۶) ، این دایره را **قاعدهٔ متوسط**



ش ۱۴۶

مخروط ناقص دوّار می‌گویند . محیط قاعدهٔ متوسط مساوی است با :

$$2\pi\varphi=\pi(R+R')$$

پس :

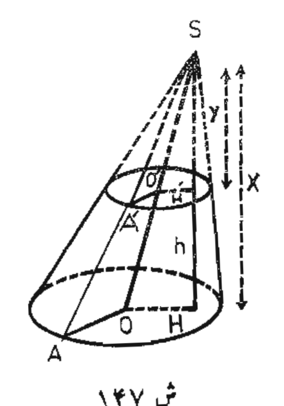
$$\boxed{S=2\pi\varphi a}$$

و می‌توان گفت :

مساحت سطح جانبی مخروط ناقص دوّار مساوی است با محیط قاعدهٔ متوسط آن درطول مولدش .

۱۹۳ - برای بدست آوردن گسترش سطح جانبی مخروط ناقص دوّار که در شکل ۱۴۶ نشان داده شده است ، کافی است که تفاضل گسترشهای سطوح جانبی مخروطهایی که مولدهاشان SA و SA' است معین کنیم .

۱۹۴ - حجم مخروط ناقص مستدیر - مخروط مستدیر به رأس S را در نظر می‌گیریم و آن را با صفحه‌ای که با صفحهٔ قاعده‌اش موازی باشد قطع می‌کنیم تا یك مخروط ناقص مستدیر پدید آید (شکل۱۴۷).



ش ۱۴۷

شعاعهای OA و $O'A'$ دو قاعدهٔ این مخروط ناقص مستدیر را بترتیب R و R' و طول ارتفاع HH' آن را h می‌نامیم . و نیز طولهای ارتفاعات SH و SH' مخروطهایی که رأسشان S وقاعده‌هاشان دوایر O و O' هستند ،

بترتیب x و y می‌نامیم .

$$SH=x \qquad \text{و} \qquad SH'=y$$

حجم مخروط ناقص مستدیر که‌آن را V می‌نامیم، عبارت است از تفاضل حجمهای این دو مخروط . پس :

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2x-\frac{1}{3}\pi R'^2y \qquad \text{(شمارهٔ ۱۹۵)}$$

اکنون می‌خواهیم V را بر حسب R و R' و h حساب کنیم ؛ برای این کار باید x و y را برحسب R و R' و h بدست‌آورد ، ملاحظه می‌کنیم که :

$$SH-SH'=HH' \qquad \text{پس :} \qquad x-y=h$$

و از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ SHO و $SH'O'$ داریم : $\frac{x}{y}=\frac{SH}{SH'}=\frac{SO}{SO'}$. و نیزدومثلث SOA و $SO'A'$ متشابهند وداریم: $\frac{SO}{SO'}=\frac{R}{R'}$ ؛ از مقایسهٔ این دو رابطه معلوم می‌شود که $\frac{x}{y}=\frac{R}{R'}$

و از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود :

$$\frac{x}{R}=\frac{y}{R'}=\frac{x-y}{R-R'}=\frac{h}{R-R'}$$

و از آنجا

$$x=\frac{hR}{R-R'} \quad \text{و} \quad y=\frac{hR'}{R-R'}$$

پس :

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{bR^3}{R-R'}-\frac{1}{3}\pi\frac{hR'^3}{R-R'}=\frac{1}{3}\pi h\frac{R^3-R'^3}{R-R'}$$

اما می‌دانیم که $R^3-R'^3=(R-R')(R^2+RR'+R'^2)$

پس :

$$V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+RR'+R'^2)$$

این دستور را می‌توان چنین نوشت :

$$V=\frac{1}{3}h(\pi R^2+\pi RR'+\pi R'^2)$$

و از این رو قضیهٔ زیر بدست می‌آید :

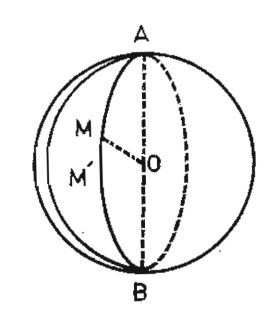
قضیه ـ حجم مخروط ناقص مستدیر مساوی است با حاصل ضرب یك سوم طول ارتفاع آن درمجموع مساحات دوقاعده وواسطهٔ هندسی آنها .

تبصره ـ این قضیه در مورد حجم مخروط ناقص دوّار نیز صحیح است (شکل ۱۴۵) [ارتفاع مخروط ناقص دوّار عبارت است از $OO'=h$].

۴ ـ کره

۱۹۵ ـ تعریف ـ کره عبارت است از مکان هندسی نقاطی از فضا که از یك نقطهٔ معین بفاصلهٔ معلومی واقع هستند . نقطهٔ معین مزبور را **مرکز کره** و فاصلهٔ مذکور را **شعاع کره** می‌گویند .

هرخط راست که ازمرکزکره (نقطهٔ O شکل ۱۴۸) بگذرد ، کره‌را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند ، بطوری که اگر شعاع کره را R بنامیم ، داریم : $OA=OB=R$. قطعه خط



ش ۱۴۸

$AB=2R$ را **قطر کره** می‌نامند . کلمهٔ قطرگاهی به معنی خط راست نامحدودی‌که از مرکزکره می‌گذرد نیز بکار می‌رود .

هرصفحه‌راکه از مرکزکره بگذرد ، **صفحهٔ قطری** می‌گویند .

هر صفحهٔ قطری کره را در دایره‌ای که مرکز و شعاعش همان مرکز و شعاع‌کره هستند قطع می‌کند ؛ چنین دایره‌ای را **دایرهٔ عظیمهٔ کره** می‌نامند .

هر کره دارای بینهایت دایرهٔ عظیمه است .

اگر مرکز و شعاع یك کره معلوم باشد ، آن‌کره مشخص است .

کره‌ای راکه مرکزش نقطهٔ O وشعاعش R باشد ، کرهٔ (R و O) می‌نامند.

اگر شعاعهای دوکره با هم مساوی باشند و مراکز آنها را بر هم منطبق کنیم ، آن دوکره بر هم منطبق می‌شوند و وقتی‌که دوکره بر هم منطبق شدند، می‌توان بدون‌آنکه ازحالت انطباق خارج شوند، یك نقطهٔ معین از اولی را بر یك نقطهٔ معلوم از دومی منطبق ساخت یعنی می‌توان دو کرهٔ متساوی را روی یکدیگر لغزانید .

۱۹۶ـ ایجاد کره بوسیلهٔ حرکت یك نیمدایره ـ نیمدایره‌ای به قطر $AB=2R$ و به مرکز O را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۴۸) .

اگر صفحه‌ای راکه شامل این نیمدایره است در حول خط راست AB دوران دهیم ، نقطهٔ O ثابت می‌ماند و در حین دوران هر نقطه مانند M متعلق به این نیمدایره، از نقطهٔ ثابت O، به فاصلهٔ ثابت $OM=R$ واقع است و بنابراین روی کرهٔ (R و O) قرار دارد . برعکس اگر نقطه‌ای مانند M' روی کرهٔ (R و O) فرض‌کنیم، نیم‌صفحه‌ای‌که مرزش خط راست AB است و از نقطهٔ M' می‌گذرد ، کره را در نیمدایرهٔ

$AM'B$ به‌قطر AB قطع می‌کند واین نیمدایره وضع خاصی‌از نیمدایرهٔ متحرك مزبور است . پس :

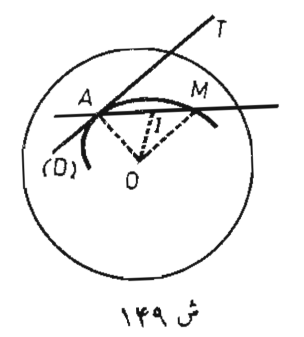
کرهٔ (R و O) را می‌توان سطح دوّاری دانست‌که محور آن‌یکی‌از اقطار کره مانند AB و مولد آن نیمدایره‌ای به قطر $AB=۲R$ باشد (نیمدایرهٔ عظیمه) .

تمرین ـ تحقیق‌کنیدکه مکان هندسی نقاطی‌از فضا که ازآنها قطعه‌ـ خط AB به‌زاویهٔ قائمه دیده می‌شود ، کره‌ای است به قطر AB .

نقاط داخل و خارج کره ـ هر نیم‌خط مانند Ox که مبدأآن مرکزکرهٔ (R و O) باشد ، کره را فقط در یك نقطه مانند A بقسمی که $OA=R$ باشد قطع می‌کند . بنابراین کره سطحی است مسدودکه فضا را به دوناحیه تقسیم می‌کند .

در صورتی که نقطهٔ P روی کرهٔ (R و O) واقع نباشد ، برحسب آنکه فاصلهٔ OP از شعاع‌کره بزرگتر یا کوچکتر باشد می‌گویند نقطهٔ P در خارج یا در داخل کره واقع است .

۱۹۷ـ خط مماس بر کره ـ نظر به تعریف شمارهٔ ۱۷۷،مماس برکره در نقطه‌ای مانند A عبارت است از وضع حد خط قاطعی مانند AM که منحنی D مرسوم بر کره را در نقاط A و M قطع کند ، وقتی که نقطهٔ M روی D بینهایت به نقطهٔ A نزدیك شود (شکل ۱۴۹) . اما قاطع AM بر میانهٔ OI از مثلث متساوی‌ـ الساقین OAM عمود است (زیرا $OA=OM=R$)؛ و وقتی‌که M

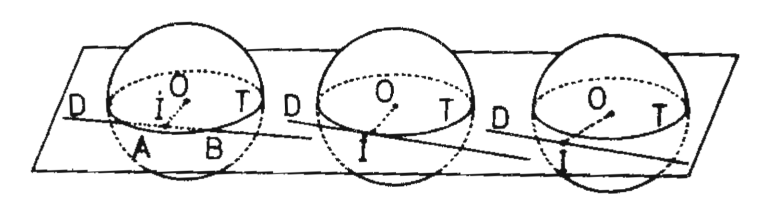


ش ۱۴۹

بر A منطبق شود ، نقطهٔ I نیز بر A منطبق خواهد شد و OI بر OA واقع می‌شود و چون AM همواره بر OI عمود می‌باشد ، وضع حد آن نیز بر وضع حد OI عمود است ؛ بنابراین مماس AT بر شعاع OA عمود می‌باشد . پس :

هر خط راست که برکره مماس باشد ، بر شعاعی که از نقطهٔ تماس می‌گذرد عمود است .

۱۹۸ ـ اوضاع نسبی یك خط راست و یك کره ـ خط راست D و کرهٔ (R و O) را در نظر می‌گیریم واز خط D و نقطهٔ O (مرکز کره) صفحه‌ای می‌گذرانیم ؛ این صفحهٔ قطری کرهٔ مفروض را در دایرهٔ عظیمه‌ای که آن را T می‌نامیم ، قطع می‌کند ؛ اگرخط راست D کرهٔ (R و O) را قطع کند ، فصل مشترکهای آنها عبارتند ازفصل مشترکهای خط D و دایرهٔ T (شکل ۱۵۰) و اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از خط D را $OI=d$ بنامیم ، از آنچه گذشت نتایج زیر حاصل می‌شود :



ش ۱۵۰

اولا ـ اگر $d<R$ باشد، خط D دایرهٔ T را در دونقطهٔ A و B قطع می‌کند و در این صورت خط وکره را **متقاطع** می‌نامند .

ثانیاً ـ اگر $d=R$ باشد ، خط D با دایرهٔ T وبنابراین باکره

مماس است و بیش از یك نقطهٔ مشترك با کره ندارد (نقطهٔ تماس).

ثالثاً ـ اگر $d>R$ باشد ، جمیع نقاط خط D در خارج دایرهٔ T و بنابراین در خارج کره واقع هستند و در این صورت خط را **خارج از کره** می‌نامند .

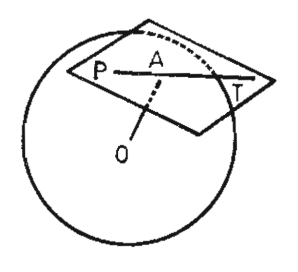
بطور خلاصه :

$d<R$ خط وکره متقاطعند .
$d=R$ خط با کره مماس است .
$d>R$ خط خارج ازکره است .

۱۹۹ـ نتیجه ـ یك خط راست نمی‌تواند یك کره را در بیش از دو نقطه قطع کند .

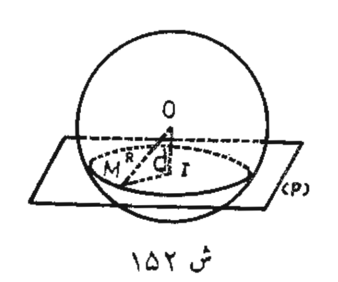
بنابراین سه نقطهٔ A ، B و C متعلق به یك‌کره نمی‌توانند روی یك خط راست واقع باشند .

۲۰۰ـ صفحهٔ مماس بر کره ـ ازآنچه گذشت نتیجه می‌شود : هرخط که از نقطهٔ A برشعاع OA (شکل ۱۴۹) عمود باشد ، بر کره مماس است و بعکس خطی که در نقطهٔ A برکره مماس باشد ، برشعاع OA عمود است ؛ بنابراین مکان هندسی خطوطی که درنقطهٔ A برکره مماس شوند، عبارت است ازصفحهٔ P که در نقطهٔ A بر شعاع OA عمود شود ؛ این صفحه را **صفحهٔ مماس در نقطهٔ A بر کره** می‌نامند (شکل ۱۵۱) .



ش ۱۵۱

۲۰۱ـ قضیه ـ اگر یك کره و یك صفحه متقاطع باشند ، فصل مشترك آنها دایره‌ای است که مرکزش تصویر مرکز کره برصفحهٔ قاطع مزبور می‌باشد .



ش ۱۵۲

اگر $OI=d$ فاصلهٔ مرکز کره از صفحهٔ قاطع P و نقطهٔ M نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ P باشد ، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OIM (شکل ۱۵۲) می‌توان نوشت :

$$\overline{OM}^2=\overline{IO}^2+\overline{IM}^2=d^2+\overline{IM}^2$$

برای آنکه نقطهٔ M متعلق به‌کره نیز باشد ، لازم وکافی است‌که OM مساوی با R باشد ؛ بنابراین لازم و کافی است که داشته باشیم :

$$d^2+\overline{IM}^2=R^2$$

یا :

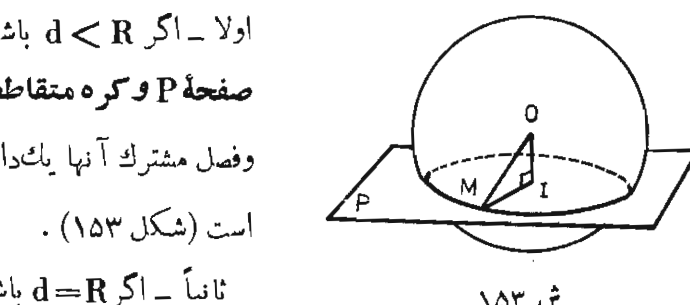
$$IM=\sqrt{R^2-d^2}$$

پس مکان هندسی نقاط فصل مشترك صفحه و کره عبارت است از دایره‌ای به مرکز I و به‌شعاع $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

این دایره فقط درصورتی وجود دارد که $d<R$ باشد . وقتی‌که d از صفر تا R ترقی‌کند ، شعاع این دایره از R تا صفر تنزل می‌کند.

اگرصفحهٔ قاطع از مرکز کره نگذرد ، شعاع دایرهٔ فصل مشترك از R کوچکتراست ؛ چنین دایره‌ای را **دایرهٔ صغیرهٔ کره** می‌نامند.

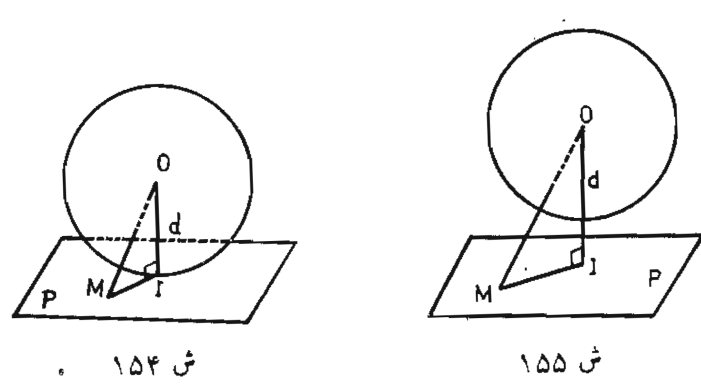
۲۰۲ـ اوضاع نسبی یك صفحه و یك‌کره ـ نظر به آنچه گذشت می‌توان‌گفت :



ش ۱۵۳

اولا ـ اگر $d < R$ باشد ، **صفحهٔ P و کره متقاطعند** وفصل مشترک آنها یک‌دایره است (شکل ۱۵۳) .

ثانیاً ـ اگر $d = R$ باشد، **صفحهٔ P** در نقطهٔ I بر شعاع OI عمود و **بر کره مماس** است و فصل



ش ۱۵۴ ش ۱۵۵

مشترک آنها یک نقطه است (نقطهٔ تماس I) (شکل ۱۵۴) .

ثالثاً ـ اگر $d > R$ باشد ، صفحهٔ P با کره نقطهٔ مشترک ندارد زیرا داریم : $OM \geq d > R$ وهر نقطه مانند M متعلق به‌صفحه درخارج کره واقع است و **صفحهٔ P** خود نیز **خارج از کره** است (شکل۱۵۵).

بطور خلاصه :

$d > R$ صفحه خارج ازکره است.
$d = R$ صفحه برکره مماس است.
$d < R$ صفحه وکره متقاطعند .

۲۰۳ـ قضیه ـ برسه نقطهٔ متعلق به یک کره می‌توان یک دایره روی کره مرور داد و بیش از یکی نمی‌توان .

سه نقطهٔ A ، B و C که روی یک کره قرار داشته باشند ، نمی‌توانند روی یک خط راست واقع باشند (شمارهٔ ۱۹۹) و بنابراین از سه نقطهٔ مزبور یک صفحه می‌توان گذراند و بیش از یکی نمی‌توان ؛ این صفحه کره را در دایره‌ای که از سه نقطهٔ A ، B و C می‌گذرد ، قطع می‌کند ؛ این دایره منحصر به‌فرد می‌باشد .

۲۰۴ـ نتیجهٔ ۱ ـ اگر سه نقطهٔ متعلق به یک دایره روی یک کره واقع باشند ، آن دایره روی آن کره واقع است .

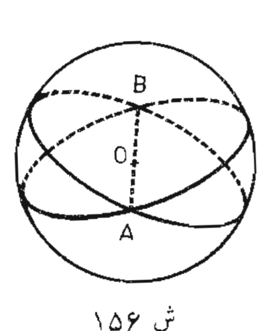
۲۰۵ـ نتیجهٔ ۲ـ اگردایره‌ای روی یک‌کره واقع نباشد ،نمی‌تواند کره را در بیش از دو نقطه قطع‌کند .

۲۰۶ ـ قضیه ـ ازدو نقطهٔ متعلق به یک‌کره‌که روی یک قطر واقع نباشند ، می‌توان یک دایرهٔ عظیمه مرور داد وبیش از یکی نمی‌توان .

زیرا از این دو نقطه و مرکز کره یک صفحه می‌توان گذراند و بیش از یکی نمی‌توان ؛ و این صفحه‌که یک صفحهٔ قطری است کره را در یک دایرهٔ عظیمه که از دو نقطهٔ مزبور می‌گذرد، قطع می‌کند .

۲۰۷ـ نتیجه ـ دو دایرهٔ عظیمهٔ متعلق به یک کره یکدیگر را در دو نقطه که در دو انتهای یک قطر واقع هستند ، قطع می‌کنند .

زیرا صفحات این دو دایره یکدیگر را در یک قطرمانند AB قطع‌می‌کنند (شکل۱۵۶) ونقاط A و B متعلق به دو دایرهٔ عظیمهٔ مزبور می‌باشند .

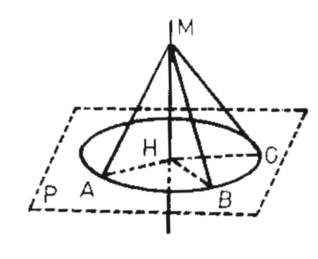


ش ۱۵۶

۲۰۸ ـ محور یك دایره ـ خطی را که از مرکز یك دایره بگذرد و بر صفحهٔ آن عمود باشد، **محور** آن دایره می‌نامند.

مکان هندسی نقاطی که از سه نقطهٔ غیر واقع بر یك استقامت به‌یك فاصله می‌باشند، عبارت است از محور دایره‌ای که از آن سه نقطه می‌گذرد.

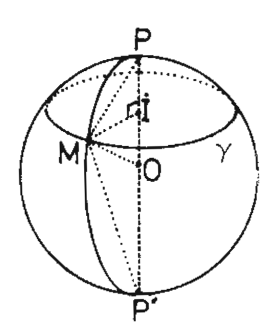
سه نقطهٔ A، B و C راکه بریك استقامت واقع نیستند، در نظر می‌گیریم (شکل ۱۵۷)؛ از این سه نقطه یك صفحه می‌گذرد که آن را P می‌نامیم؛ برای آنکه نقطه‌ای مانند M از نقاط A، B و C به یك فاصله باشد، یعنی داشته باشیم: $MA=MB=MC$، لازم وکافی است که تصویر نقطهٔ M برصفحهٔ P که آن را H می‌نامیم، از نقاط A، B و C به یك فاصله باشد



ش ۱۵۷

(شماره‌های ۵۸ و ۵۹)؛ پس نقطهٔ H مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است و خط HM بر محور این دایره منطبق می‌باشد.

۲۰۹ ـ قطبهای دایره‌ای که روی یك کره واقع باشد ـ اگر دایره‌ای روی یك کره واقع باشد، هر یك از دو انتهای قطری از کره راکه برصفحهٔ دایرهٔ مزبور عمود باشد، **قطب** آن دایره می‌گویند. در شکل ۱۵۸ نقاط P و P' قطبهای دایرهٔ γ هستند. چون نقطهٔ I، مرکز دایرهٔ γ، عبارت است



ش ۱۵۸

از تصویر مرکز O از کره روی صفحهٔ دایرهٔ γ، بنابراین، نقاط P و P' روی محور دایرهٔ γ واقع هستند (شکل ۱۵۸).

۲۱۰ ـ قضیه ـ جمیع نقاط دایره‌ای‌که روی یك‌کره واقع‌باشد، از یکی از دو قطب آن به‌یك فاصله و از قطب دیگر آن نیز به‌یك فاصله‌اند.

زیرا قطعه‌خطهایی مانند PM (شکل ۱۵۸)، که نقطهٔ P را به‌نقاط مختلف دایرهٔ γ وصل می‌کنند، نسبت به‌صفحهٔ دایرهٔ γ مایلهایی هستند که پاهای آنها از پای عمود PI به یك فاصله‌اند و بنابراین مایلهای مزبور متساوی می‌باشند.

به این دلیل است که طولهای $PM=\rho$ و $P'M=\rho'$ را **فاصله‌های قطبی** دایرهٔ γ می‌گویند.

تبصره ـ زاویهٔ M از مثلث PMP' (شکل ۱۵۸) قائمه است و اگر OI را d بنامیم، می‌توان نوشت:

اولاً: $\overline{PM}^2+\overline{P'M}^2=\overline{PP'}^2$ پس: $\rho^2+\rho'^2=4R^2$

ثانیاً: $\overline{PM}^2=PP'\times PI$ یا: $\rho^2=2R(R-d)$

ثالثاً: $\overline{P'M}^2=PP'\times P'I$ یا: $\rho'^2=2R(R+d)$

۲۱۱ ـ عکس قضیهٔ ۲۱۰ ـ مکان هندسی نقاطی از یك کره که از یك نقطهٔ واقع بر آن کره به یك فاصله می‌باشند، یك دایره است.

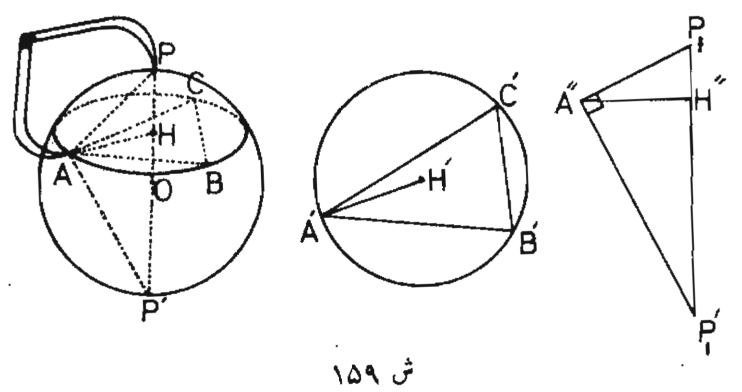
نقطهٔ ثابتی‌مانند P و نقطهٔ دلخواهی‌مانند M روی‌کرهٔ (O و R) در نظر می‌گیریم و آن را به دو انتهای قطر PP' وصل می‌کنیم و تصویر نقطهٔ M را روی قطر PP' نقطهٔ I می‌نامیم (شکل ۱۵۸)؛ در مثلث قائم‌الزاویهٔ MPP' داریم: $\overline{PM}^2=PP'\times PI$ و اگر فاصلهٔ PM را ρ بنامیم، از این رابطه حاصل می‌شود $PI=\frac{\rho^2}{2R}$؛ بنابراین اگر

نقطهٔ M روی کره تغییر مکان دهد بطوری که فاصلهٔ $PM=\rho$ ثابت بماند ، نقطهٔ I نیز روی قطر PP' ثابت می‌ماند ؛ پس نقطهٔ M در صفحه‌ای که در نقطهٔ I بر قطر PP' عمود شود واقع است و مکان هندسی آن روی کره ، دایره‌ای است که نقاط P و P' دو قطب آن می‌باشند .

۲۱۲- پرگار کروی - پرگار کروی پرگاری است که دو شاخهٔ آن خمیده هستند (شکل۱۵۹). با استفاده از قضیهٔ ۲۱۱ می‌توان به‌وسیلهٔ پرگار کروی روی یك کرهٔ صلب دایره رسم کرد . اگر یکی از دو سر پرگار کروی را در نقطهٔ P ثابت نگاه داریم و به‌وسیلهٔ سر دیگر آن روی کره یك منحنی رسم کنیم، این منحنی نظر به قضیهٔ ۲۱۱ دایره‌ای خواهد بود که یکی از دو قطبش نقطهٔ P می‌باشد . به‌وسیلهٔ پرگار کروی می‌توان فاصلهٔ دو نقطهٔ متعلق به یك کره را نیز معین کرد .

۲۱۳- تعیین شعاع یك کرهٔ صلب - روی کرهٔ مفروض، نقطه‌ای مانند P را قطب قرار می‌دهیم و دایرهٔ صغیره‌ای به فاصلهٔ قطبی دلخواه $PA=\rho$ روی کره می‌کشیم و روی این دایرهٔ صغیره سه نقطهٔ دلخواه A ، B و C را اختیار می‌کنیم و فاصله‌های AB ، BC و AC را به وسیلهٔ پرگار کروی معین می‌کنیم (شکل۱۵۹)؛ در خارج ، روی صفحهٔ کاغذ مثلث $A'B'C'$ را مساوی با مثلث ABC که سه‌ضلع آن معلوم است می‌سازیم و نقطهٔ H' مرکز دایرهٔ محیطی آن را معین می‌کنیم ؛ به این ترتیب طول $A'H'=AH$ بدست می‌آید و می‌توانیم روی صفحهٔ کاغذ مثلث قائم‌الزاویهٔ $A''H''P_1$ را مساوی با مثلث AHP بامعلومات وتر $A''P_1=AP=\rho$ وضلع $A''H''=A'H'=AH$ و همچنین مثلث

قائم‌الزاویهٔ $P_1A''P'_1$ را مساوی با مثلث قائم‌الزاویهٔ PAP' رسم کنیم؛ قطعه‌خط $P_1P'_1=PP'$ که به این طریق بدست می‌آید ، مساوی با

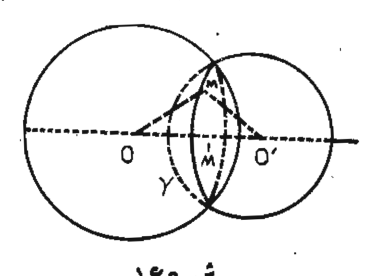


ش ۱۵۹

قطر کره است ؛ (و نیز می‌توان با معلوم بودن اندازهٔ قطعه‌خطهای AB ، BC ، AC و AP طول PP' را به‌وسیلهٔ محاسبه بدست آورد) .

۲۱۴- فصل مشترك دو کرهٔ متقاطع - دو کرهٔ O و O' را در نظر می‌گیریم ویکی از نقاط مشترك آنها را M می‌نامیم و فرض می‌کنیم که M روی خط OO' واقع نباشد (شکل ۱۶۰) .

صفحه‌ای که از نقاط O ، O' و M می‌گذرد ، دو کرهٔ مزبور را در دو دایرهٔ عظیمه که در نقطهٔ M متقاطع هستند قطع می‌کند؛ اگر این دو دایره در حول محور OO' دوران کنند ، دو کرهٔ مفروض را می‌پیمایند و از دوران نقطهٔ M یك دایره مانند γ ایجاد می‌شود که خط OO' محور آن است و



ش ۱۶۰

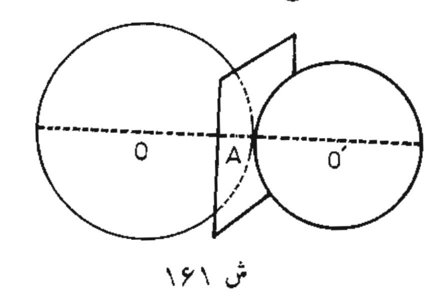
دایرهٔ γ متعلق به هر دو کره می‌باشد . دو کرهٔ مفروض نمی‌توانند نقطهٔ مشترکی که روی دایرهٔ γ واقع نباشد ، داشته‌باشند ؛ زیرا برای هر نقطه مانند M' که متعلق به هر دوکره باشد ، داریم :

$$O'M=O'M' \text{ و } OM=OM'$$

و مثلث $OM'O'$ با مثلث OMO' مساوی است (در حالت سه ضلع) و ضمن دوران در حول OO' بر آن منطبق می‌شود . پس :

اگر دو کره متقاطع باشند ، فصل مشترك آنها دایره‌ای است که خط‌المرکزین دوکره محور آن می‌باشد .

۲۱۵ـ کره‌های مماس ـ اگر دوکرهٔ O و O' یك نقطهٔ مشترك مانند A واقع روی خط‌المرکزین خود داشته باشند (شکل ۱۶۱) ، هر دو کره در نقطهٔ A یك صفحهٔ مماس دارند (صفحهٔ عمود بر OO') در این صورت دو کره را **مماس** و نقطهٔ A را **نقطهٔ تماس** آنها می‌گویند . چون هرصفحه که شامل خط OO' باشد دو کره را در دودایرهٔ عظیمه‌که در نقطهٔ A مماس هستند قطع می‌کند، دوکرهٔمفروض نقطهٔ مشترك دیگری جز A ندارند .



ش ۱۶۱

۲۱۶ـ اوضاع نسبی دوکره ـ هر صفحه که از مراکز دو کرهٔ مفروض بگذرد ، هر یك از آنها را در یك دایرهٔ عظیمه قطع می‌کند و دوکرهٔ مفروض را می‌توان سطوح دوّاری که از دوران دو دایرهٔ مزبور در حول خط‌المرکزین دوکره ایجاد می‌شود دانست ؛ پس اوضاع نسبی

دوکره را می‌توان از روی اوضاع نسبی دو دایرهٔ عظیمهٔ مزبور تعیین کرد واگرشعاعهای دوکره را R و R' و فاصلهٔ مراکز آنها را $OO'=d$ بنامیم ، نتایج زیر حاصل می‌شود :

$d>R+R'$	دوکره متخارجند .
$d=R+R'$	دوکره مماس خارجند.
به فرض $R>R'$ ؛ $R-R'<d<R+R'$	دوکره متقاطعند .
به فرض $R>R'$ ؛ $d=R-R'$	دوکره مماس داخلند .
به فرض $R>R'$ ؛ $d<R-R'$	یکی از دوکره داخل دیگری واقع است .

۵ ـ مساحت سطح کره و اندازهٔ حجم کره

سطح کره

همانطور که در مورد سطح استوانه و سطح مخروط گفتیم ، سطح کره را نیز نمی‌توان با واحد سطح، یعنی مترمربع ، مقایسه‌کرد و باید سطح کره را تعریف‌کنیم و برای این کار بدواً قضایا و تعاریف مقدماتی زیر را بیان می‌کنیم :

۲۱۷ ـ قضیه ـ از دوران یك قطعه خط درحول محوری که با آن در یك صفحه واقع باشد ولی از آن عبور نکند ، سطحی ایجاد می‌شود که مساحت آن مساوی است باحاصل ضرب تصویر آن قطعه‌خط برمحور مزبور در طول دایره‌ای که مرکزش بر محور واقع باشد و خودش در وسط قطعه‌خط مفروض با آن مماس شود .

قطعه‌خط AB و محور $x'x$ را در یك صفحه در نظر می‌گیریم :

حالت کلی ـ فرض می‌کنیم که قطعه خط AB با محور $x'x$

موازی یا بر آن عمود نباشد و AB و $x'x$ نقطهٔ مشترکی نیز نداشته باشند (شکل۱۶۲) ؛ وسط قطعه خط AB را M وتصویر M را بر $x'x$ نقطهٔ M' می‌نامیم و از M عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا $x'x$ را در نقطهٔ O قطع کند ؛ دایره‌ای که مرکزش O و شعاعش OM باشد ، دارای شرایطی است که درحکم قضیه ذکر شده است. از دوران قطعه ـ خط AB در حول محور $x'x$ سطح جانبی مخروط ناقص دوّاری ایجاد می‌شود که مولدش AB وشعاع مقطع متوسطش MM' است ، اگرسطح آن را S بنامیم ، داریم :

$$S = ۲\pi \times MM' \times AB$$ (شمارهٔ ۱۹۲)

برای تبدیل این دستور به صورت حکم قضیه ، ازنقطهٔ A عمود AH را برBB' فرود می‌آوریم ؛ دومثلث $OM'M$ و AHB که اضلاع متناظرشان برهم عمودند با هم مشابه می‌باشند ؛ پس :

$$\frac{OM}{AB} = \frac{MM'}{AH}$$

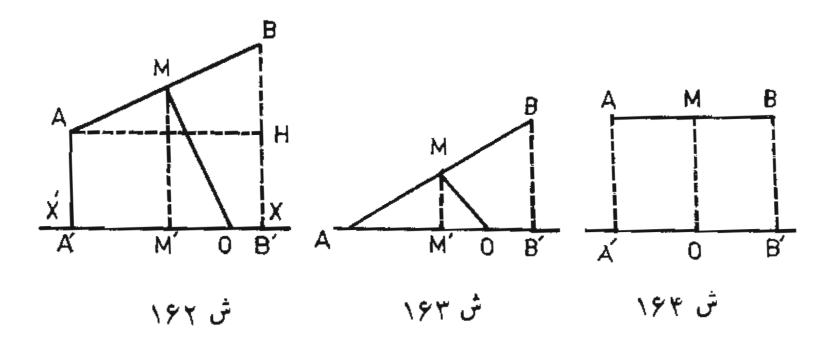
یعنی : $$MM' \times AB = OM \times AH = OM \times A'B'$$

و از آنجا : $$\boxed{S = ۲\pi \times OM \times A'B'}$$

حالت خاص ۱ـ اگریك سر قطعه‌خط AB ، مثلانقطهٔ A، روی محور واقع باشد (شکل ۱۶۳) ، سطحی که از دوران آن ایجاد می‌شود عبارت است ازسطح جانبی یك مخروط دوّار ؛ پس :

$$S = \pi \times BB' \times AB = ۲\pi \times MM' \times AB$$

مثلثهای $OM'M$ و $AB'B$ که اضلاعشان نظیر بنظیر بر هم



ش ۱۶۲ ش ۱۶۳ ش ۱۶۴

عمودند ، متشابه می‌باشند و مانند حالت کلی نتیجه می‌شود :

$$MM' \times AB = OM \times AB'$$

پس : $$S = ۲\pi \times OM \times AB'$$

حالت خاص ۲ ـ اگر AB با محور موازی باشد (شکل ۱۶۴)، سطحی که از دوران آن ایجاد می‌شود سطح جانبی یك استوانهٔ دوّار است ؛ پس :

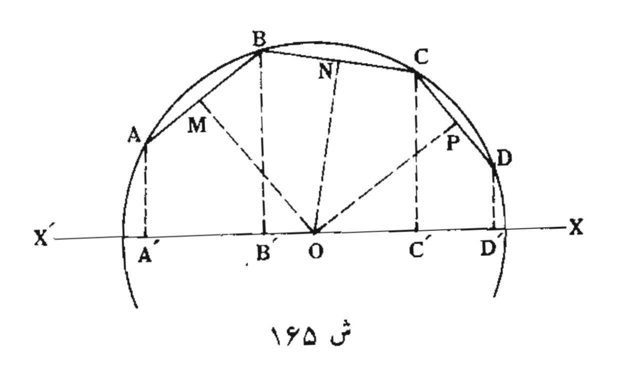
$$S = ۲\pi \times AA' \times AB = ۲\pi \times OM \times A'B'$$

تبصره ـ در حالتی‌که قطعه‌خط AB برمحور $x'x$ عمود باشد، طول تصویرآن بر $x'x$ مساوی با صفر است و قضیهٔ ۲۱۷ در این حالت مورد ندارد .

۲۱۸ـ قضیه ـ از دوران یك خط شکستهٔ منتظم محدب در حول محوری که ازمرکزش بگذرد ولی ازآن عبور نکند ، سطحی ایجاد می‌شود که مساحتش مساوی است با حاصل‌ضرب تصویر خط شکسته برمحور مزبور در طول دایرهٔ محاطی آن .

خط شکستهٔ منتظم $ABCD$ را که در دایره‌ای به مرکز O محاط است ، درنظرمی‌گیریم و فرض می‌کنیم که خط $x'x$ از نقطهٔ O

مرکز خط شکستهٔ مفروض بگذرد ولی از خط شکسته عبور نکند



ش ۱۶۵

(شکل ۱۶۵) . این خط شکسته محدب است و هیچیك از اضلاع آن بر $x'x$ عمود نیست . عمودمنصفهای اضلاع **AB** ، **BC** و **CD** در نقطهٔ **O** متقاربند و اگر اوساط این اضلاع را بترتیب **M** ، **N** و **P** بنامیم ، داریم :

$$OM=ON=OP=r$$

(**r** شعاع دایرهٔ محاط در خط شکستهٔ مفروض است) . تصاویر نقاط **A**، **B** ، **C** و **D** را بر $x'x$ بترتیب A' ، B' ، C' و D' می‌نامیم . نظر به قضیهٔ شمارهٔ ۲۱۷ می‌توان نوشت :

مساحت سطحی که از دوران **AB** در حول $x'x$ ایجاد می‌شود :

$$2\pi r \times A'B'$$

مساحت سطحی که از دوران **BC** در حول $x'x$ ایجاد می‌شود :

$$2\pi r \times B'C'$$

مساحت سطحی که از دوران **CD** در حول $x'x$ ایجاد می‌شود :

$$2\pi r \times C'D'$$

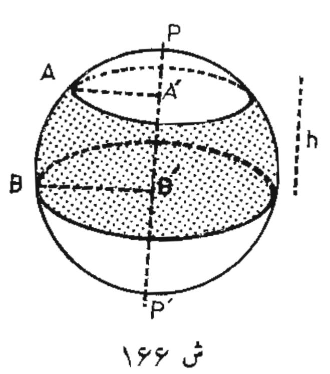
بنابراین S ، یعنی سطحی که از دوران خط شکستهٔ **ABCD** در حول $x'x$ ایجاد می‌شود ، عبارت است از :

$$S=2\pi r(A'B'+B'C'+C'D')$$

یا :

$$S=2\pi r \times A'D'$$

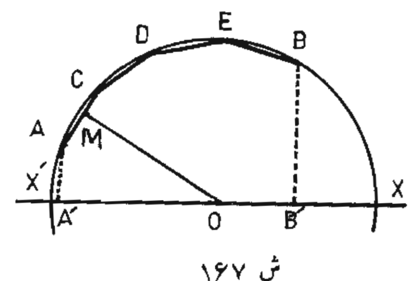
۲۱۹- منطقهٔ کروی - قسمتی از سطح‌کره را که مابین دو مقطع مسطح متوازی محصور باشد، منطقه می‌نامند . دو دایرهٔ مقطع را **دوقاعدهٔ منطقه** و فاصلهٔ این دو مقطع را از یکدیگر **ارتفاع منطقه** می‌گویند (شکل ۱۶۶) . منطقه را می‌توان سطح حادث از دوران کمان **AB** متعلق به یك نیمدایرهٔ عظیمه در حول قطر PP' آن دانست . در این مقام کمان **AB** را **کمان مولد منطقهٔ AB** می‌گویند و ارتفاع منطقه‌که‌آن را **h** می‌نامیم ، عبارت است از طول تصویر کمان مولد روی قطر PP'. خط PP' **محور منطقه** نامیده می‌شود.



ش ۱۶۶

۲۲۰ - تعریف - مساحت سطح منطقه عبارت است از حد مساحت سطح حادث از دوران خط شکستهٔ منتظم محدبی‌که درکمان مولد آن محاط شود هرگاه عدهٔ اضلاع این خط شکسته به سمت بینهایت میل‌کند .

فرض‌می‌کنیم‌که خط شکستهٔ منتظم محدب **ACDEB** در کمان **AB** محاط باشد



ش ۱۶۷

(شکل ۱۶۷) ؛ وقتی‌که عدهٔ اضلاع این خط شکسته بینهایت زیاد شود، این خط رفته رفته با کمان AB مشتبه می‌شود و سطحی که از دوران این خط در حول محور منطقه ایجاد می‌شود به سمت حدی که همان مساحت منطقه باشد ، میل می‌کند .

۲۲۱ـ قضیه ـ مساحت منطقهٔ کروی مساوی است با حاصل ضرب طول ارتفاع آن در طول دایرهٔ عظیمه .

نظر به شمارهٔ ۲۱۸ مساحت سطح حادث از دوران خط شکستهٔ ACDEB (شکل۱۶۷) مساوی است با $۲\pi\times OM\times A'B'$ و وقتی‌که عدهٔ اضلاع این خط شکسته بینهایت زیاد شود ، طول قطعه‌خط AC به سمت صفر میل می‌کند و نقطهٔ M ، وسط AC ، بر A منطبق می‌شود؛ پس شعاع دایرهٔ محاطی خط شکسته ، یعنی OM ، به سمت شعاع کره یعنی R میل می‌کند و مساحت منطقه عبارت است از :

$$S=۲\pi R\times A'B'$$

یا :

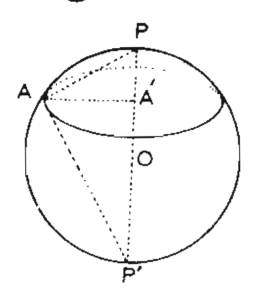
$$\boxed{S=۲\pi Rh}$$

می‌توان دستورفوق را چنین تعبیر کرد : مساحت هر منطقهٔ کروی مساوی است با مساحت سطح جانبی استوانهٔ دوّاری که ارتفاعش مساوی با ارتفاع منطقه و قاعده‌اش مساوی با دایرهٔ عظیمهٔ کره باشد .

و نیز از دستور فوق نتیجه می‌شود که : مساحات منطقه‌هایی از یك‌کره‌که ارتفاعاتشان متساوی باشند ، باهم برابرند .

۲۲۲ـ عرقچین کروی ـ اگر یکی از صفحات دو قاعدهٔ یك منطقهٔ کروی باکره مماس شود، قاعدهٔ نظیرآن، به‌نقطهٔ P تبدیل خواهد

شد ؛ در این حالت منطقه را **عرقچین کروی** می‌گویند (شکل۱۶۸) و نقطهٔ P را **رأس** عرقچین کروی وطول وتر $PA=\rho$ را **شعاع قطبی** عرقچین کروی وسطح دایرهٔ به‌شعاع AA' را **قاعدهٔ** عرقچین کروی و طول PA' را ارتفاع عرقچین کروی می‌نامند . هر دایره که روی کره رسم شود ، آن را به دو عرقچین کروی‌که رأسهایشان یعنی P و P' دو انتهای یك قطر کره (واقع بر محور دایرهٔ مرسوم) هستند ، تقسیم می‌کند .



ش ۱۶۸

۲۲۳ ـ قضیه ـ مساحت عرقچین کروی مساوی است با مساحت دایره‌ای که شعاعش شعاع قطبی آن عرقچین باشد .

در واقع اگر سطح عرقچین کروی را S و شعاع قطبی آن را ρ بنامیم (شکل۱۶۸) ، داریم :

$$S=۲\pi R\times PA'=\pi\times PP'\times PA'$$

اما از مثلث قائم‌الزاویهٔ PAP' نتیجه می‌شود :

$$PP'\times PA'=\overline{PA}^{۲}$$

پس

$$S=\pi\times\overline{PA}^{۲}$$

یا

$$\boxed{S=\pi\rho^{۲}}$$

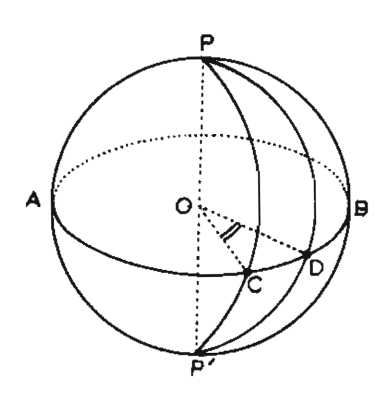
۲۲۴ ـ مساحت کره ـ کره را می‌توان منطقه‌ای دانست که ارتفاع آن h مساوی با قطر کره است ؛ پس مساحت کره عبارت است از :

$$S=۲\pi R\times ۲R$$

یا :

$$\boxed{S=۴\pi R^{۲}}$$

۲۲۵ــ قاچ کروی ـ هر فرجهٔ محدبی که یالش یکی از قطرهای کرهٔ O باشد ، قسمتی از سطح این‌کره را در بر می‌گیرد که آن را قاچ کروی می‌نامند. زاویهٔ مسطحهٔ این‌فرجه را **زاویهٔ قاچ** می‌گویند؛ روی کره ، هرقاچ به‌دو نیمدایرهٔ عظیمه محدود می‌شود (شکل۱۶۹)؛ روی یك کره اگر زوایای دوقاچ با هم مساوی باشند ، آن دو قاچ با هم مساویند و مساحات دوقاچ کروی با زوایای آنها متناسب می‌باشند .



ش ۱۶۹

مساحت قاچی که زاویهٔ مرکزیش یك درجه باشد ، $\frac{1}{360}$ مساحت‌کره است؛ پس مساحت قاچی که زاویه‌اش n درجه باشد ، عبارت است از :

$$S=\frac{4\pi R^2\times n}{360}=\frac{\pi R^2 n}{90}$$

اگر اندازهٔ زاویهٔ قاچ g گراد باشد ، مساحتش مساوی است با :

$$S=\frac{4\pi R^2\times g}{400}=\frac{\pi R^2 g}{100}$$

واگر اندازهٔ زاویهٔ قاچ α رادیان باشد ، مساحتش مساوی است با :

$$S=\frac{4\pi R^2\times \alpha}{2\pi}=2R^2\alpha$$

حجم کره

۲۲۶ــ قضیه ـ از دوران سطح یك مثلث* در حول محوری‌که در

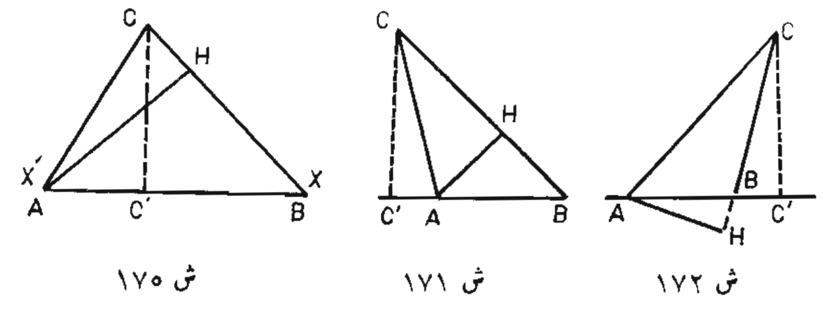
* مقصود ، قسمتی از صفحه است که به یك مثلث محدود می‌شود .

صفحهٔ آن واقع باشد و از یك راس آن بگذرد ولی از مثلث عبور نکند جسمی ایجاد می‌شود که حجم آن مساوی است با یك سوم حاصل ضرب مساحت سطحی که از دوران ضلع مقابل به رأس ثابت بدست می‌آید در طول ارتفاع نظیر همان رأس .

حالت اول ـ یك ضلع مثلث روی محور واقع است .

فرض می‌کنیم که رأسهای A و B از مثلث ABC روی محور $x'x$ واقع باشد (شکل ۱۷۰ تا ۱۷۲) و ارتفاعات AH و CC' را رسم می‌کنیم . حجمی را که از دوران مثلث ABC در حول $x'x$ ایجاد می‌شود ، V می‌نامیم .

اگر نقطهٔ C' روی قطعه خط AB واقع باشد، V مساوی است با مجموع حجمهای مخروطهایی‌که از دوران دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ACC' و BCC' در حول $x'x$ ایجاد می‌شوند (شکل ۱۷۰) و اگر نقطهٔ C' خارج از قطعه خط AB واقع باشد ، V مساوی با تفاضل حجمهای دو مخروط مزبور خواهد بود (شکل۱۷۱ و ۱۷۲).



ش ۱۷۰ ش ۱۷۱ ش ۱۷۲

پس در صورتی که C' بین A و B واقع باشد (شکل ۱۷۰) ، می‌توان نوشت :

$$V=\frac{1}{3}\pi\times\overline{CC'}^2\times AC'+\frac{1}{3}\pi\times\overline{CC'}^2\times C'B$$

$$=\frac{۱}{۳}\pi\times\overline{CC'}^{۲}(AC'+C'B)$$

$$=\frac{۱}{۳}\pi\times\overline{CC'}^{۲}\times AB=\frac{۱}{۳}\pi\times CC'\times AB\times CC'$$

اما حاصل ضرب $AB\times CC'$ که مساوی با دو برابر مساحت مثلث ABC است ، مساوی است با $BC\times AH$ ، پس :

$$V=\frac{۱}{۳}\pi\times CC'\times BC\times AH$$

وسطحی که از دوران BC درحول x'x ایجاد می‌شود عبارت است از سطح جانبی مخروط دوّاری که رأسش B و شعاع قاعده‌اش CC' باشد ؛ پس مساحت این سطح عبارت است از :

(مساحت سطح BC) $=\pi\times CC'\times BC$ (شمارهٔ ۱۸۸)

ومی‌توان نوشت: $V=\frac{۱}{۳}$ (مساحت سطح BC) $\times AH$

در صورتی که C' خارج ازقطعه خط AB باشد ، درشکل ۱۷۱ داریم :

$$V=\frac{۱}{۳}\pi\times\overline{CC'}^{۲}\times C'B-\frac{۱}{۳}\pi\times\overline{CC'}^{۲}\times C'A$$

$$=\frac{۱}{۳}\pi\times\overline{CC'}^{۲}(C'B-C'A)=\frac{۱}{۳}\pi\times\overline{CC'}^{۲}\times AB$$

و در شکل ۱۷۲ داریم :

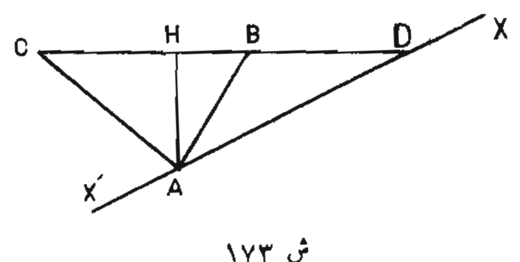
$$V=\frac{۱}{۳}\pi\times\overline{CC'}^{۲}\times AC'-\frac{۱}{۳}\pi\times\overline{CC'}^{۲}\times BC'$$

$$=\frac{۱}{۳}\pi\times\overline{CC'}^{۲}(AC'-BC')=\frac{۱}{۳}\pi\times\overline{CC'}^{۲}\times AB$$

و بقیهٔ استدلال مثل حالت قبل است .

حالت دوم ـ رأس A از مثلث ABC روی x'x واقع است و ضلع BC با x'x موازی نیست .

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و فصل مشترک خط BC را با x'x نقطهٔ D می‌نامیم(شکل ۱۷۳) ؛ حجم V که از دوران مثلث ABC در حول x'x ایجاد می‌شود عبارت است از تفاضل حجمهایی که از دوران مثلثهای ACD و ABD در حول x'x ایجاد می‌شود . ارتفاع نظیر رأس A از این دو مثلث ، AH می‌باشد و نظر به حالت اول ، داریم :



ش ۱۷۳

$$V=\frac{۱}{۳}(\text{مساحت سطح }CD)\times AH-\frac{۱}{۳}(\text{مساحت سطح }BD)\times AH$$

$$=\frac{۱}{۳}AH(\text{مساحت سطح }CD-\text{مساحت سطح }BD)$$

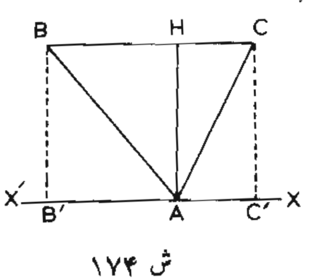
$$V=\frac{۱}{۳}(\text{مساحت سطح }BC)\times AH$$

حالت سوم ـ یکی از اضلاع مثلث با محور x'x موازی است.

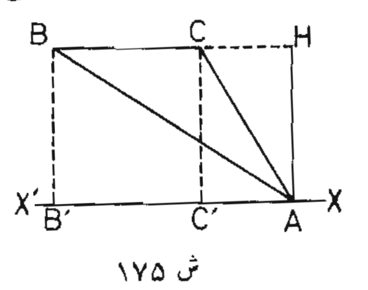
در این حالت حجم V یا عبارت است از مجموع حجمهایی که از دوران دو مثلث AHB و AHC در حول x'x ایجاد می‌شود (شکل۱۷۴) یا مساوی است با تفاضل آنها (شکل ۱۷۵) .

اما حجمی که از دوران مثلث AHB ایجاد می‌شود مساوی است

با تفاضل حجم استوانه‌ای که از دوران مستطیل $AHBB'$ ایجاد می‌شود و حجم مخروطی که از دوران مثلث ABB' پدید می‌آید ؛ شعاع



ش ۱۷۴



ش ۱۷۵

قاعده‌های این دوجسم یکی است $AH=BB'$ وارتفاع آنها نیزیکی است. $HB=AB'$ ؛ پس :

$$(\text{اندازهٔ حجم } AHB)=\pi\times\overline{AH}^2\times HB-\frac{1}{3}\pi\times\overline{AH}^2\times HB$$

$$=\frac{2}{3}\pi\times\overline{AH}^2\times HB=\frac{AH}{3}(2\pi\times AH\times HB)$$

اما $2\pi\times AH\times HB$ عبارت است ازمساحت سطح جانبی استوانهٔ دوّاری که از دوران HB ایجاد می‌شود ؛ پس :

$$(\text{اندازهٔ حجم } AHB)=\frac{AH}{3}\times(\text{مساحت سطح } HB)$$

و به همین طریق :

$$(\text{اندازهٔ حجم } AHC)=\frac{AH}{3}\times(\text{مساحت سطح } HC)$$

و بنابراین:

$$V=\frac{AH}{3}\times(\text{مساحت سطح } BH)\pm\frac{AH}{3}\times(\text{مساحت سطح } HC)$$

$$=\frac{AH}{3}\times(\text{مساحت سطح } HB\pm\text{مساحت سطح } HC)$$

یا : $V=\frac{1}{3}(\text{مساحت سطح } BC)\times AH$

۲۲۷ ـ تعریف ـ اگر دو سر یك خط شکستهٔ منتظم محدب را به مرکز آن وصل کنیم ، به این طریق قسمتی از صفحه محدود می‌شود که آن را **قطاع چندضلعی منتظم** می‌نامند (شکل ۱۷۶) .

۲۲۸ـ قضیه ـ ازدوران یك قطاع چندضلعی منتظم مانند OABCD در حول محوری که از مرکز آن O بگذرد ولی ازقطاع عبورنکند، جسمی ایجاد می‌شود که حجم آن مساوی است با یك سوم حاصل‌ضرب سطح حادث از دوران خط شکستهٔ ABCD در شعاع دایرهٔ محاطی آن .

حجم V حادث از دوران قطاع چندضلعی OABCD در حول محور $x'x$ (شکل ۱۷۶) عبارت است از مجموع حجمهایی که از دوران مثلثهای متساوی‌ـ الساقین OAB و OBC و OCD ایجاد می‌شود .

ش ۱۷۶

ارتفاعات نظیر رأس O از این مثلثها مساوی است با OH یعنی شعاع دایرهٔ محاطی خط شکستهٔ منتظم ABCD ؛ پس :

$$V=\frac{OH}{3}(\text{مساحت سطح } AB)+\frac{OH}{3}(\text{مساحت سطح } BC)+\frac{OH}{3}(\text{مساحت سطح } CD)$$

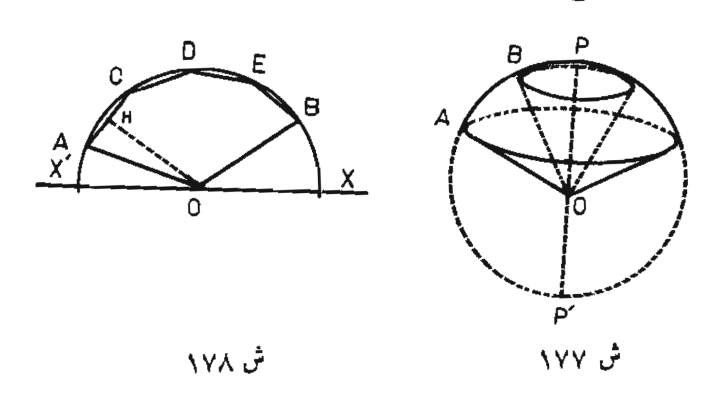
یا :

$$V=\frac{OH}{3}(\text{مساحت سطح } AB+\text{مساحت سطح } BC+\text{مساحت سطح } CD)$$

پس : $V=\frac{1}{3}$ (مساحت سطح ABCD) $\times OH$

۲۲۹- قطاع کروی- از دوران قطاع یك دایره در حول قطری از دایره‌که از قطاع عبور نکند، جسمی تولید می‌شود که آن را قطاع‌کروی می‌نامند .

اگر قطاع OAB از دایرهٔ O در حول قطر PP′ دوران کند (شکل ۱۷۷) ، از دوران آن یك قطاع‌کروی تولید می‌شود. قطاع دایرهٔ OAB را **قطاع مولد** و منطقه‌ای را که از دوران کمان AB تولید



ش ۱۷۸ ش ۱۷۷

می‌شود ، **منطقهٔ قاعدهٔ** قطاع کروی می‌نامند .

۲۳۰ - تعریف - قطاع‌کروی راکه از دوران قطاع‌دایرهٔ OAB در حول قطر $x'x$ تولید می‌شود در نظر می‌گیریم و خط شکستهٔ منتظم ACDEB را در کمان AB محاط می‌کنیم (شکل ۱۷۸) ؛ قبول می‌کنیم‌که **وقتی‌که عدهٔ اضلاع خط شکستهٔ منتظم ACDEB بینهایت زیاد شود، حجم حادث ازدوران قطاع چندضلعی منتظم OACDEB در حول $x'x$ به سمت حدی میل می‌کند و این حد را حجم قطاع کروی مفروض می‌نامیم .**

۲۳۱- قضیه - حجم قطاع کروی مساوی است با یك سوم حاصل‌ضرب مساحت منطقهٔ قاعدهٔ آن در شعاع کره .

حجمی که از دوران قطاع n ضلعی منتظم OACDEB (شکل ۱۷۸) تولید می‌شود و آن را V_n می‌نامیم ، مساوی است با :

$V_n=\frac{1}{3}$ (مساحت سطح ACDEB) $\times OH$ (شمارهٔ ۲۲۸)

وقتی که n یعنی عدهٔ اضلاع خط شکستهٔ منتظم بینهایت زیاد شود، مساحت سطحی‌که از دوران این خط تولید می‌شود به‌سمت‌مساحت منطقهٔ قاعده میل می‌کند و حد OH یعنی حد شعاع دایرهٔ محاطی خط شکسته عبارت است از R؛ پس حجم قطاع‌کروی‌که آن را V می‌نامیم، عبارت است از :

$V=\frac{1}{3}$ (مساحت منطقهٔ AB) $\times R$

اما نظر به شمارهٔ ۲۲۱، مساحت منطقهٔ AB مساوی است با $2\pi Rh$

پس : $$V=\frac{1}{3}\times 2\pi Rh\times R$$

یا : $$\boxed{V=\frac{2}{3}\pi R^2h}$$

۲۳۲- حجم کره - کره را می‌توان یك قطاع کروی دانست که از دوران یك نیمدایرهٔ عظیمه درحول قطر خود بوجود می‌آید ؛ دراین صورت منطقهٔ قاعده عبارت است از سطح کره و از **قضیهٔ** ۲۳۱ نتیجه می‌شود که :

حجم کره مساوی است با یك سوم حاصل‌ضرب مساحت سطح آن در شعاعش .

بنابراین داریم : $V=\frac{1}{3}\times 4\pi R^2\times R$

یا :

$$\boxed{V=\frac{4}{3}\pi R^3}$$

(ونیز می‌توان این دستور را از دستور حجم قطاع کروی بدست آورد و برای این کارکافی است‌که در عبارت $\frac{2}{3}\pi R^2 h$ به‌جای h مقدار $2R$ قرار داده شود) .

دستور فوق را می‌توان چنین تعبیر کرد : حجم کرهٔ به شعاع R مساوی است با حجم مخروط دوّاری که طول ارتفاعش R و مساحت قاعده‌اش مساوی با مساحت‌کره باشد .

۲۳۳ - تبصرهٔ ۱ - اگر قطر کره را D بنامیم ، دستور حجم‌کره

به صورت : $V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3$

یا : $\boxed{V=\frac{1}{6}\pi D^3}$ درمی‌آید .

۲۳۴ - تبصرهٔ ۲- اگر دوکره به شعاعهای R و R' داشته باشیم و مساحتهای آنها را بترتیب S و S' و حجمهای آنها را بترتیب V و V' بنامیم، داریم :

$$\frac{V'}{V}=\frac{\frac{4}{3}\pi R'^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\left(\frac{R'}{R}\right)^3 \quad \text{و} \quad \frac{S'}{S}=\frac{4\pi R'^2}{4\pi R^2}=\left(\frac{R'}{R}\right)^2$$

و می‌توان گفت :

نسبت مساحات دو کره مساوی است با مربع نسبت شعاعهای آنها و نسبت حجمهای دو کره مساوی است با مکعب نسبت شعاعهای آنها .

مسائل

استوانه و مخروط

۱ - مطلوب‌است تعیین یك سطح استوانه‌ای دوّارکه شامل سه‌خط راست متوازی معلوم باشد .

۲ - دو خط راست متوازی D_1 و D_2 مفروض است ؛ مطلوب است تعیین مکان هندسی یال فرجه‌ای که اندازهٔ آن α باشد و وجوهش از خطوط راست مفروض بگذرند (حالت خاص : $\alpha=90^\circ$) .

۳ - مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی از فضا که از خط راست معلوم D به فاصلهٔ معین l واقع باشند .

۴ - مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی از فضا که نسبت فواصل آنها از دو خط راست معلوم D_1 و D_2 مساوی با عدد معلوم m باشد .

۵ - محورهای دو سطح استوانه‌ای دوّار با هم موازی هستند ؛ ثابت کنید اگر این دو سطح یکدیگر را قطع کنند ، فصل مشترك آنها از دو خط تشکیل می‌شود .

۶ - مطلوب‌است تعیین یك سطح مخروطی دوّارکه شامل سه خط راست متقارب معلوم باشد .

سطح و حجم استوانه و مخروط

۷ - مربعی به‌ضلع a درحول یکی از اضلاعش دوران می‌کند؛ مطلوب است تعیین سطح‌کل و حجم جسم حاصل .

۸ - مطلوب است محاسبهٔ سطح و حجم جسمی که از دوران یك مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a در حول یکی از اضلاعش تولید می‌شود .

۹ ـ مربعی به ضلع a درحول یکی از اقطارش دوران می‌کند؛ مطلوب است محاسبهٔ سطح وحجم جسم حادث از دوران مربع .

۱۰ ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (A قائمه) متوالیاً درحول هریك از سه ضلعش دوران می‌کند؛ حجم جسم حادث از دوران این مثلث را در حول اضلاع BC ، AC و AB بترتیب V ، V' و V'' می‌نامیم؛ ثابت‌کنیدکه:

$$\frac{۱}{V^۲}=\frac{۱}{V'^۲}+\frac{۱}{V''^۲}$$

۱۱ ـ مطلوب است محاسبهٔ سطح و حجم جسم حادث از دوران یك شش ضلعی منتظم که طول ضلعش a است ، در حول خط راستی که مرکزش را به یك رأسش وصل می‌کند .

۱۲ ـ طول قطرهای یك لوزی ۲a و ۲b است ؛ این لوزی یك مرتبه در حول قطر اطول ویك مرتبه در حول قطر اقصرش دوران می‌کند ؛ نسبت مساحات دو جسم حادث را حساب کنید .

۱۳ ـ مطلوب‌است محاسبهٔ نسبت حجمهای دوجسم مذکور درمسئلهٔ۱۲.

۱۴ ـ مطلوب است محاسبهٔ حجم جسمی‌که ازدوران یك‌متوازی‌الاضلاع درحول یکی‌ازاضلاعش حادث می‌شود (طولهای دوضلع متوالی‌متوازی‌الاضلاع را a و b و زاویهٔ بین آنها را α فرض کنید) .

کره

۱۵ ـ اولا مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی از یك‌کره که از دو نقطهٔ A و B متعلق به همان کره به یك فاصله باشند . ثانیاً مطلوب است تعیین نقاطی از یك‌کره که از سه نقطهٔ متعلق به همان کره به‌یك فاصله باشند.

۱۶ ـ مطلوب است مکان هندسی نقاطی که از آنها قطعه‌خط معلومی به زاویهٔ قائمه دیده شود .

۱۷ ـ صفحه‌ای‌ازیك خط راست ثابت می‌گذرد ویك‌کره راقطع‌می‌کند؛ مطلوب است تعیین مکان هندسی مراکز مقطعهای حاصل .

۱۸ ـ ثابت کنید که مماسهایی که از یك نقطهٔ واقع درخارج یك کره

برآن رسم می‌شوند متساویند (مقصود قسمتی از خطهای مماس است که بین نقطهٔ مفروض و نقطهٔ تماس واقع می‌باشند) .

۱۹ ـ آیا می‌توان مکعبی در کرهٔ به شعاع R محاط کرد ؟ مطلوب است محاسبهٔ ضلع این مکعب برحسب R .

۲۰ ـ مطلوب است محاسبهٔ حجم کرهٔ محاط در یك چهاروجهی منتظم که طول یالش a باشد .

۲۱ ـ نیمدایره‌ای به‌قطر $AB=۲R$ مفروض است؛ دراین نیمدایره خط شکستهٔ منتظمی محاط می‌کنیم‌که دوسرش نقاط A و B باشند و این خط شکستهٔ منتظم را در حول AB دوران می‌دهیم ؛ مطلوب است محاسبهٔ سطح حادث هرگاه عدهٔ اضلاع خط شکستهٔ مزبور ۲ یا ۳ یا ۴ باشد .

۲۲ ـ کره‌ای به شعاع R در یك استوانهٔ دوّار که ارتفاعش ۲R است محاط شده است ؛ مطلوب است تعیین نسبت سطح این کره به سطح جانبی استوانهٔ مزبور .

۲۳ ـ دو دایرهٔ O و O' مماس خارج هستند و AA' یك‌مماس مشترك خارجی‌آنهاست ؛ ثابت کنید که اگر شکل در حول خط OO' دوران کند ، مساحت سطح حادث از دوران AA' واسطهٔ هندسی است مابین مساحات حادث از دوران دو دایره .

۲۴ ـ نیمدایرهٔ به قطر AB را در نقاط C و D به سه‌کمان متساوی تقسیم می‌کنیم و شکل را درحول AB دوران می‌دهیم ؛ مطلوب است محاسبهٔ مساحت منطقه‌هایی‌که ازدوران کمانهای AC ، CD و DB بدست می‌آیند.

پایان